Math Un 110-3

Mathesis. Systemata & methodi
143.

R

Drittes Buch.

Elemente der Analysis.

1. Die gemeine Analysis, oder die Algebra.

2. Die analytische Geometrie.

3. Die höhere Analysis, oder die Analysis des Unendlichen.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Erster Abschnitt.

Die gemeine Analysis, oder die Algebra.

1. Von den bestimmten Aufgaben.
2. Von den unbestimmten Aufgaben.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

Erstes Kapitel.

Von den bestimmten Aufgaben.

I. Form der Gleichungen.

§. 1.

Eine Gleichung ist eine Verbindung mehrerer bekannter und unbekannter Größen, deren einige zusammen den übrigen zusammen, oder welche alle zusammen der Null gleich sind. Die Größen selbst, welche in der Gleichung durch das Additions- und Subtractionszeichen verbunden sind, heißen die Glieder der Gleichung, und können mit veränderten Zeichen beliebig von der einen Seite des Gleichheitszeichens auf die andre gebracht werden. Ist in irgend einem Gliede die unbekannte Größe in eine bekannte multiplicirt: so heißt der bekannte Factor der Coëfficient der unbekannten Größe.

So ist z. E. $a^2 - ab + b^2 = 3ay + bx$, oder $a^2 - ab + b^2 - 3ay - bx = 0$, eine Gleichung von fünf

fünf Gliedern, und im vierten Gliede 3a der Coëfficient der unbekannten Größe y, im fünften b der Coëfficient der unbekannten x.

Zusatz. Man kann füglich einen Unterschied zwischen der Endgleichung und den Mittelgleichungen machen. Erstere ist als der letzte Schluß anzusehen, auf welchen man bey Auflösung einer Aufgabe kommt, und enthält nicht mehr als eine unbekannte Größe, die mit mehrern bekannten verwickelt ist. Letztere enthalten mehrere unbekannte Größen, und müssen dergestalt mit einander verglichen und verbunden werden, daß daraus zuletzt eine Endgleichung entstehe.

Anmerkung. Die Verbindung, worinn die unbekannte Größe in der Gleichung mit den bekannten Größen stehet, dient solche daraus zu finden; welches Geschäfte demnach die Analysis mit der Arithmetik gemein hat, doch mit dem Unterschiede, daß die Arithmetik die Aufgaben unter ganz speciellen Bedingungen auflöset, und nur die einfachen Operationen lehret, welche man in bestimmten Fällen anzuwenden hat; die Analysis aber allgemeine Methoden zur Auflösung der Aufgaben abhandelt, und zeigt, welche einfache Operationen der Arithmetik und in welcher Ordnung solche in bestimmten Fällen anzuwenden sind.

§. 2.

Eine Gleichung ist einfach, wenn die unbekannten Größen nur in der ersten Potenz, und einzeln, darinnen vorkommen; zusammengesetzt aber, wenn irgend eine der unbekannten Größen in irgend einer Potenz vorkommt, welche höher als die erste ist, oder wenn irgend ein Product zweyer oder mehrerer unbekannter Größen darinn vorhanden ist. Hiernach entstehen quadratische, cubische, biquadratische und

noch

noch höhere Gleichungen; welche alle nach der höchsten Potenz der unbekannten Größe, oder nach der Anzahl der unbekannten Factoren den Namen erhalten.

So ist die §. 1. angeführte Gleichung einfach. Aber $x^3 = p^5 x^2 + q^4 y + r$, oder $x^3 - p^5 x^2 - q^4 y - r = 0$ cubisch. Auch ist die Gleichung $xyz - a^7 b^4 + m = 0$ cubisch.

Zusatz. Hiernach nennt man auch die Gleichungen vom 1, 2, 3, 4, nten **Grade**, oder von der eben so vielten Dimension, als der Exponent der höchsten Potenz beträgt, in welcher die unbekannte Größe in der Gleichung vorkommt. So sind z. E. alle cubische Gleichungen, vom dritten Grade, oder von der dritten Dimension.

§. 3.

Eine Gleichung ist rein, worinn die unbekannte Größe nur in derjenigen Potenz, wovon die Gleichung den Namen führet, vorkommt; gemischt aber, wenn die unbekannte Größe außer solcher Potenz noch in einer, oder mehrern andern niedrigern Potenzen in der Gleichung vorhanden ist.

So ist z. E. $x^2 + q = 0$ eine reine quadratische, und $xyz - a^7 b^4 + m = 0$ eine reine cubische Gleichung. Hingegen ist $x^2 + mx + q = 0$ eine gemischte quadratische, $xyz + xy - a^2 b^3 - q = 0$ eine gemischte cubische Gleichung. Allgemein ist $x^m \mp x^{m-1} \mp x^{m-2} \ldots\ldots \mp r = 0$ eine gemischte, und $x^m \mp q = 0$ eine reine Gleichung vom mten Grade.

§. 4.

Eine gemischte Gleichung heißt vollständig, wenn außer einem Gliede, welches lauter bekannte Größen enthält, die übrigen Glieder alle Potenzen der unbe-

kannten Größe von der ersten an bis zu derjenigen enthalten, von welcher die Gleichung den Namen führet; unvollständig aber, wenn ein oder mehrere Glieder einer vollständigen Gleichung fehlen. Hiezu wird die Gleichung II. §. 31. nach den Potenzen der unbekannten Größe geordnet.

So ist z. E. $x^3 \mp mx^2 \mp nx \mp q = 0$ eine vollständige cubische Gleichung, welche daher vier Glieder haben muß, und unvollständig wird, wenn eins oder mehrere derselben fehlen; wodurch der Begriff eines Gliedes, welcher §. 1. gegeben worden, näher bestimmt wird.

Zusatz. 1. Jede reine Gleichung ist als eine unvollständige Gleichung anzusehen, welche nur zwey Glieder hat, wovon das eine lauter bekannte Größen, das andre aber die unbekannte Größe in derjenigen Potenz enthält, wornach dies Gleichung benannt wird.

2. Eine Formel, welche alle Glieder einer vollständigen Gleichung von einem bestimmten Grade enthält, heißt die allgemeine Form der Gleichung dieses bestimmten Grades, worauf alle vorkommende Gleichungen gebracht werden können. So ist das obige Beyspiel die allgemeine Form aller cubischen Gleichungen.

§. 5.

Eine Gleichung wird reducirt, wenn man ihre Glieder durch Hülfe der arithmetischen Operationen so viel möglich zusammen ziehet, und bequemer ausdrückt, so daß die Gleichung zuletzt auf ihre allgemeine Form gebracht ist. Nämlich

1. Lassen sich einige Glieder durch Addition oder Subtraction zusammenziehen: so wird dadurch ihre Anzahl vermindert.

Aus

Aus $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$ wird, wenn man $2x$ subtrahirt, und $3a$ addirt, $5b = 8a + x$. Aus $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$ wird $\frac{bx}{a} = a$. Aus $abx + a^3 - a^2x = ab^2 - 2abx - x^3$ wird $x^3 + (3ab - a^2)x + (a^3 - ab^2) = 0$.

2. Ist ein Factor, oder ein Divisor allen Gliedern der Gleichung gemein: so wird die Gleichung mit solchem Factor dividirt, oder mit solchem Divisor multiplicirt.

Aus $15b^2 = 24ab + 3bx$ wird, wenn man mit $3b$ dividirt, $5b = 8a + x$. Aus $\frac{b^3}{ac} - \frac{b^2x}{c^2} = \frac{x^2}{c}$ wird, wenn man mit c multiplicirt, $\frac{b^3}{a} - \frac{b^2x}{c} = x^2$.

3. Eben dies gilt auch von zusammengesetzten Factoren.

Aus $y^3 + 2cy^2 + by^2 + 3bcy - b^2c = 0$ wird II. §. 34. wenn man mit $y + b$ dividirt, $y^2 + 2cy - bc = 0$.

4. Ist eines der Glieder ein Bruch, welcher im Nenner die unbekannte Größe hat, und sich auf vorige Art nicht reduciren läßt: so wird die Gleichung mit solchem Nenner selbst, oder mit einem Divisor dieses Nenners multiplicirt.

Aus $\frac{ax}{a - x} + b = x$ wird, wenn man mit $a - x$ multiplicirt, $ax + ab - bx = ax - x^2$, und nach num. 1. $ab - bx = -x^2$, oder $x^2 - bx + ab = 0$. Aus $\frac{a^3 - ab^2}{2cy - c^2} = y - c$ wird, wenn man mit $2y - c$ multiplicirt, $\frac{a^3 - ab^2}{c} = 2y^2 - 3cy + c^2$.

5. Ist eines der Glieder, welches die unbekannte Größe enthält, irrational: so schaffe man alle übrige Glieder auf die andre Seite, und erhebe die Gleichung in eine Potenz, welche mit der Wurzel des irrationalen Gliedes einerley Exponenten hat.

Aus $\sqrt{(a^2 - ax)} = x - a$ wird, wenn man quadrirt $a^2 - ax = x^2 - 2ax + a^2$, und nach num. 1. $0 = x^2 - ax = x - a$. Aus $\sqrt[3]{(a^2x + 2ax^2 - x^3)} = a - x$ wird, wenn man cubirt, $a^2x + 2ax^2 - x^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$, und nach num. 1. $4a^2x - ax^2 - a^3 = 0$, und nach num. 2. $4ax - x^2 - a^2 = 0$, oder $x^2 - 4ax + a^2 = 0$. Aus $y = \sqrt{ay + y^2 - a\sqrt{(ay - y^2)}}$ wird, wenn man quadrirt, $y^2 = ay + y^2 - a\sqrt{(ay - y^2)}$ und nach num. 1. $a\sqrt{(ay - y^2)} = -ay$, und wenn man abermals quadrirt, $a^2(ay - y^2) = a^2y^2$, und nach num. 1. $a - y = y$, oder $a = 2y$.

6. Ist die Gleichung geordnet, und hat die unbekannte Größe in der höchsten Potenz einen Coëfficienten: so wird die Gleichung mit solchem Coëfficienten dividirt.

Aus $\frac{bx}{a} = a$ wird, wenn man mit $\frac{b}{a}$ dividirt, das ist, mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt $x = \frac{a^2}{b}$. Aus $(2ac - c^2)\, x^3 + (a^3 + a^2c)\, x^2 + (ac - 2ac)\, x - a^3c^2 = 0$ wird, wenn man mit $(2ac - c^2)$ dividirt, $x^3 + \frac{a^3 + a^2c}{2ac - c^2} . x^2 + a^2x - \frac{a^3c^2}{2ac - c^2} = 0$.

7. Ist eine gemischte Gleichung unvollständig: so läßt sie sich bisweilen zu einem niedrigern Grade bringen, indem man sie nach num. 2. reducirt, oder indem man

mit der gesuchten Größe aus durch die übrigen Größen ausdrückt.

Daß $x^n - px^n = 0$ wird, wenn man statt x^n sein Werth $= a$ u. s. w. Daß $y^2 - qy^2 - r = 0$ wird, wenn man $y = b^2$ setzt, $b^2 - qb - r = 0$.

§. 6.

Eine Gleichung wird transformirt, wenn solche mehrere unbekannte Größen enthält, und man dieselbe durch Hülfe anderer Gleichungen auf eine andere Gleichung bringt, welche weniger unbekannte Größen sind. Solche Operation heißt auch die Elimination der unbekannten Größen. Da durch jede Gleichung eine von den unbekannten Größen eliminirt werden kann, so können sie alle bis auf eine eliminirt, wenn man so viel Gleichungen hat, als unbekannte Größen angenommen sind.

Zusatz. Sollte sich durch zwey Gleichungen mehr als eine unbekannte Größe eliminiren lassen, so ist dies ein Zeichen, entweder daß in den Bedingungen der Aufgabe ein Fehler verborgen sey, oder daß der Fehler in den Gleichungen selbst liege. Z. E. Man habe die beyden Gleichungen $ax - by = ab - a^2$, und $bx + by = b^2 + a^2$: so entsteht, wenn man Gleiches zu Gleichem addirt, $ax + bx = ab + b^2$, so daß y und x eliminirt sind, welches daher einen Fehler verräth.

§. 7.

Aufgabe. Es sind zwey Gleichungen für zwey unbekannte Größen gegeben; man soll eine der unbekannten Größen, wenn sie in den andern Dimensionen vorkommt, eliminiren.

Man bestimme den Werth solcher unbekannten Größe entweder aus beyden Gleichungen, und setze den einen

man der unbekannten Größe eine andre von geringerm Grade substituirt.

Aus $x^4 - mx^2 = 0$ wird, wenn man mit x^2 dividirt, $x^2 - m = 0$. Aus $x^4 - qx^2 - r$ wird, wenn man $y = x^2$ setzt, $y^2 - qy - r = 0$.

§. 6.

Eine Gleichung wird transformirt, wenn solche mehrere unbekannte Größen enthält, und man dieselbe durch Hülfe mehrerer Gleichungen auf eine neue Gleichung bringt, worinn weniger unbekannte Größen sind. Solche Operation heißt auch die Elimination der unbekannten Größen. Da durch jede Hülfsgleichung eine von den unbeknnnten Größen eliminirt werden kann: so werden sie alle bis auf eine eliminirt, wenn man so viele Gleichungen hat, als unbekannte Größen vorhanden sind.

Zusatz. Sollte sich durch zwey Gleichungen mehr als eine unbekannte Zahl eliminiren lassen: so ist dies ein Zeichen, entweder daß in den Bedingungen der Frage ein Fehler verborgen sey, oder daß der Fehler in den Gleichungen selbst liege. Z. E. Man habe die beyden Gleichungen $ax - by = ab - az$, und $bx + by = b^2 + az$: so entsteht, wenn man Gleiches zu Gleichem addirt, $ax + bx = ab + b^2$, so daß y und z eliminirt sind; welches daher einen Fehler verräth.

§. 7.

Aufgabe: Es sind zwey Gleichungen für zwey unbekannte Größen gegeben; man soll eine der unbekannten Größen, wenn sie in der ersten Dimension vorkommt, eliminiren.

Man bestimme den Werth solcher unbekannten Größe entweder nach beyden Gleichungen, und setze den einen

Werth dem andern gleich; oder nur nach der einen Gleichung, und bringe den so bestimmten Werth in die andre Gleichung.

Erstlich: Die Elimination durch Gleichsetzung des Werthes.

Man habe die beyden Gleichungen $a + x = b + y$, und $2x + y = 3b$: so giebt die erstere $y = a + x - b$, und die zweyte $y = 3b - 2x$, folglich $a + x - b = 3b - 2x$, folglich $3x + a - 4b = 0$. Eben dies erhält man, wenn man den einen Werth von dem andern subtrahirt, welches weil beyde gleich sind, Null giebt.

Ferner habe man die Gleichungen $ax - 2by = ab$, und $xy = b^2$: so ist $y = \frac{ax - ab}{2b} = \frac{b^2}{x}$; folglich, wenn man mit $2b$ und mit x multiplicirt, $ax^2 - abx = 2b^3$, folglich $x^2 - bx - \frac{2b^3}{a} = 0$.

Weiter habe man die Gleichungen $\frac{b^2x - aby}{a} = ab + xy$, und $bx + \frac{ay^2}{c} = 2a^2$: so ist, wenn man solche reducirt, die erste $b^2x - ayx = a^2b + aby$, und die zweyte $bcx = 2a^2c - ay^2$; folglich $x = \frac{a^2b + aby}{b^2 - ay} = \frac{2a^2c - ay^2}{bc}$; folglich $y^3 - \frac{b^2}{a} y^2 - \frac{2a^2c - b^2c}{a} y + b^2 c = 0$.

Zweytens: Die Elimination durch Substitution des Werthes.

Man habe die beyden Gleichungen $xy^2 = b^3$, und $x^2 + y^2 = by - ax$: so giebt die erste $x = \frac{b^3}{y^2}$. Bringt man diesen Werth statt x in die zweyte Gleichung: so erhält

3. Wenn den bestimmten Beyspielen [illegible] gegeben [illegible], findet man [illegible] aus [illegible] [illegible]

Daher setze man die Gleichungen [illegible] so findet man [illegible]. Setzt man diesen Werth statt y in die erste Gleichung, so erhält man [illegible]

oder [illegible]

folglich [illegible], und [illegible] folglich [illegible]

Zusatz. Zuweilen findet man auf kürzerem Wege die Elimination. Z. E. wenn man die beyden Gleichungen [illegible] und [illegible] mit einander multiplicirt, so erhält man $xx^2 = \frac{b^2(b-1)}{1} \cdot \frac{a}{x-b} = ab^2$, folglich $x = b$.

§. 8.

Aufgabe. Es sind zwey Gleichungen für zwey unbekannte Größen, die beyde in einer höhern Dimension vorkommen, gegeben; man soll eine derselben eliminiren.

Auflösung. Ist die höchste Dimension der zu eliminirenden Größe in beyden Gleichungen einerley, so erhält man, wenn man ihren Werth durch jede der beyden Gleichungen bestimmt, eine neue Gleichung, worin obgedachte höchste Dimension vermindert ist. Wiederholt

 man,

[illegible] [illegible] einen Glie[illegible] [illegible] in die andre Gleichung.

Erstens: Die Elimination durch Gleichsetzung der Werthe.

Man habe die beyden Gleichungen $a + x = b + y$, [illegible] $y = a + x - b$, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] gibt.

[illegible]

[illegible]

folglich x^2 [illegible]

[illegible]

$b^2 + y^2$, [illegible] [illegible] gleich [illegible]

[illegible] die erste [illegible] und die zweyte [illegible] [illegible]

[illegible] $b^2 c = 0$.

Zweytens: Die Elimination durch Substitution des Werthes.

Man habe die beyden Gleichungen $xy^2 = b^3$, und $x^2 + y^2 = by - ax$ so giebt die erste $x = \frac{b^3}{y^2}$. Bringt man diesen Werth statt x in die zweyte Gleichung, so erhält

erhält man $\frac{b^6}{y^4} + y^2 = by - \frac{ab^3}{y^2}$; folglich, wenn man mit y^4 multiplicirt, $b^6 + y^6 = by^5 - ab^3y^2$; folglich $y^6 - by^5 + ab^3y^2 + b^6 = 0$.

Ferner habe man die Gleichungen $ay^2 + a^2y = z^3$, und $yz - ay = az$: so giebt die zweyte $y = \frac{az}{z-a}$. Bringt man diesen Werth statt y in die erste Gleichung: so erhält man $\frac{a^3z^2}{z^2 - a^2} + \frac{a^3z}{z-a} = z^3$; folglich mit z dividirt, $\frac{a^3z}{(z+a)(z-a)} + \frac{a^3}{z-a} = z^2$, und mit $z - a$ multiplicirt, $\frac{a^3z}{z+a} + a^3 = z^3 - az^2$, und mit $z + a$ multiplicirt, $a^3z + a^3z + a^4 = z^4 - a^2z^2$; folglich $z^4 - a^2z^2 - 2a^3z - a^4 = 0$.

Zusatz. Zuweilen findet man viel kürzere Wege zur Elimination. Z. E. wenn man die beyden Gleichungen $ax = \frac{b^2x - b^3}{z}$, und $x = \frac{az}{x-b}$ mit einander multiplicirt: so erhält man $ax^2 = \frac{b^2(x-b)}{z} \cdot \frac{az}{x-b} = ab^2$, folglich $x = b$.

§. 8.

Aufgabe: Es sind zwey Gleichungen für zwey unbekannte Größen, die beyde in einer höhern Dimension vorkommen, gegeben; man soll eine derselben eliminiren.

Erstlich. Ist die höchste Dimension der zu eliminirenden Größe in beyden Gleichungen einerley: so erhält man, wenn man ihren Werth durch jede der beyden Gleichungen bestimmt, eine neue Gleichung, worin obgedachte höchste Dimension vermindert ist. Wiederholt

man, wenn es nöthig ist, diese Operation bis man die unbekannte Größe auf die erste Dimension gebracht hat, und setzt alsdenn ihren Werth, den sie nach der zuletzt gefundenen Gleichung hat, in eine der anfänglich gegebenen Gleichungen: so wird solche unbekannte Größe alsdenn eliminirt seyn.

Man habe die Gleichungen $x^2 + 5x = 3y^2$, und $2xy - 3x^2 = 4$: so ist $x^2 = 3y^2 - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, folglich $9y^2 - 15x = 2xy - 4$, folglich $9y^2 + 4 = (2y + 15)x$, folglich $x = \frac{9y^2 + 4}{2y + 15}$, welchen Werth man in eine der anfänglichen Gleichungen statt x bringt.

Zweytens. Ist solche höchste Dimension in beyden Gleichungen nicht einerley: so multiplicirt man die Gleichung, worinn die geringere Dimension ist, mit einer solchen Potenz der zu eliminirenden Größe, daß dieselbe mit der ersten einerley Dimension erhält, und verfährt alsdenn nach dem ersten Falle.

Man habe z. E. $y^3 = xy^2 + 3x$, und $y^2 = x^2 - xy - 3$: so wird aus letzterer, wenn man sie mit y multiplicirt, $y^3 = x^2y - xy^2 - 3y$; folglich $xy^2 + 3x = x^2y - xy^2 - 3y$. Mit dieser und der einfachern von den beyden anfänglichen Gleichungen verfährt man wie beym ersten Falle.

Zusatz. Zuweilen kann man auch hier kürzere Wege finden. Man habe z. E. $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$, und $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$: so wird aus letzterer, wenn man y subtrahirt, $x + \frac{y^2}{x} = 20 - y$, und quadrirt, $x^2 + 2y^2 +$

$\frac{y^4}{x^2}$

$\frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y + y^2$, und hieraus, wenn man y^2 subtrahirt, $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y$. Nun war nach der anfänglichen ersten Gleichung $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$. Folglich ist $400 - 40y = 140$, oder $\frac{400 - 140}{40} = y$.

§. 9.

Aufgabe: Es sind drey und mehrere Gleichungen für eben so viel unbekannte Größen gegeben; man soll sie alle bis auf eine eliminiren.

Man suche den Werth der ersten unbekannten Größe in der ersten Gleichung, und setze denselben in die übrigen Gleichungen. Eben so verfahre man mit der zweyten, dritten und den übrigen unbekannten Größen.

Man habe z. E. $ax = yz$, und $x + y = z$, und $5x = y + 3z$: so ist nach der ersten Gleichung $x = \frac{yz}{a}$, folglich $\frac{yz}{a} + y = z$, und $\frac{5yz}{a} = y + 3z$, und demnach x eliminirt. Eben so eliminire man auch z.

Zusatz. Mittelst dieser Methode lassen sich auch jede irrationale Glieder aus einer Gleichung bringen, wenn man sie beliebigen Buchstaben gleich setzt; wodurch man eben so viele Gleichungen erhält, mittelst deren man die angenommenen Buchstaben eliminiren kann.

Man habe z. E. $\sqrt{ay} - \sqrt{(a^2 - ay)} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$, und setze $\sqrt{ay} = p$; $\sqrt{(a^2 - ay)} = q$; $\sqrt[3]{ay^2} = r$: so hat man $p - q = 2a + r$; $ay = p^2$; $a^2 - ay = q^2$; $ay^2 = r^3$, und kann p, q, r, eine nach der andern eliminiren. §. 8.

§. 10.

Eine Gleichung wird formirt, wenn man eine vorgelegte Aufgabe oder Frage genau zergliedert, alle Bedingungen und Angaben derselben von einander absondert, und solche mit allgemeinen Ausdrücken bezeichnet, wozu die allgemeine Arithmetik, besonders das erste Kapitel von der Buchstabenrechnung, und vorzüglich das erste Stück von der allgemeinen Bezeichnung der Größen, hinreichende Mittel angiebt.

Zusatz. Diese Operation ist eine Art der Uebersetzung, indem man das, was in der Wortsprache ausgedrückt ist, in die Sprache der allgemeinen Zeichen überträgt; wobey es denn ebenfalls geschiehet, daß sich manches auf verschiedene Arten geben läßt, worunter eine netter als die andre ist. Auch trift es sich öfters, daß man, so wie in Sprachen, deren jede ihr eigenthümliches hat, vieles nicht den Worten, sondern dem Sinne nach übersetzen muß. Besonders hat man bey dieser Art der Uebersetzung noch dahin zu sehen, daß man nicht mehrere unbekannte Größen, als die unumgängliche Nothwendigkeit erfordert, in die Gleichung bringe. Von allen diesen und andern dergleichen Regeln werden die Aufgaben in dem Folgenden lehrende Beyspiele geben, bey denen man auf die angebrachte Methode in Formirung der Gleichungen vorzüglich aufmerksam seyn muß.

§. 11.

Eine Gleichung wird aufgelöst, wenn man solche auf die allereinfachste Form bringt, worinn die unbekannte und gesuchte Größe von allen bekannten und gegebenen Größen gänzlich abgesondert ist. Durch solche Reduction findet man einen Werth, welcher für die unbekannte Größe in die Gleichung gebracht, solche in Null verwandelt. Diesen Werth nennt man

man auch die Wurzel der Gleichung, welche man also durch die Auflösung oder Solution erhält.

Anmerkung. Bisher giebt die Algebra bestimmte allgemeine Regeln der Solution nur für alle reine Gleichungen von jeder Dimension, und für die gemischten quadratischen Gleichungen; welches auch in den meisten und gewöhnlichsten Fällen hinreichend ist. Für die höhern gemischten Gleichungen hat man auch angefangen, Theorien, besonders über die Natur der Wurzeln einer Gleichung, zu gründen, welche aber in den ersten Elementen der Algebra noch ausgesetzt bleiben. In diesen Theorien wird unter andern auch bewiesen, daß in jeder Gleichung so viel Wurzeln vorhanden sind, als Dimensionen die Gleichung hat.

II. Reine Gleichungen.

§. 12.

Die allgemeine Form aller reinen Gleichungen ist $x^m = A$; daher $x = \sqrt[m]{A}$, oder $mlx = lA$, folglich $lx = \frac{lA}{m}$ ist. Je nachdem nun der Exponent m die Zahlen 1, 2, 3, 4. u. s. w. bedeutet, ist auch die Gleichung einfach, quadratisch, cubisch, biquadratisch u. s. w.

§. 13.

Aufgabe: Ein Kaufmann nimmt jährlich zur Bestreitung seines Hauswesens 100 ₰ von seinem Vermögen, und vermehrt das übrige um $\frac{1}{3}$. Nach 3 Jahren ist er noch einmal so reich. Wie groß ist sein Kapital?

Das anfängliche Kapital sey x. Im ersten Jahre nimmt er davon 100 ₰, bleibt $x - 100$. Dies vermehrt

mehrt er um $\frac{1}{3}$, macht $x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$. Im zweyten Jahre nimmt er davon 100 ₶, bleibt $\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$. Dies vermehrt er um $\frac{1}{3}$, macht $\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$. Im dritten Jahre nimmt er davon 100 ₶, bleibt $\frac{16x-2800}{9} - 100 = \frac{16x-3700}{9}$. Dies vermehrt er um $\frac{1}{3}$, macht $\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$. Dies beträgt zweymal so viel als das anfängliche Kapital, oder $2x$. Demnach ist $\frac{64x-14800}{27} = 2x$.

Da $\frac{64x-14800}{27} = 2x$; so ist $64x - 14800 = 54x$, folglich $(64 - 54)x = 14800$, folglich $x = \frac{14800}{10} = 1480$ ₶.

§. 14.

Aufgabe: Es ist die Summe a und das Product b zweyer Zahlen gegeben; man soll die Zahlen selbst finden.

Da man die Summe weiß, so braucht man IV. §. 49. nur noch die Differenz, um die beyden Zahlen zu wissen. Es sey daher die Differenz x: so ist die größere der gesuchten Zahlen $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$, und die kleinere $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$; folglich ihr Product $b = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}x^2$, folglich $x^2 = a^2 - 4b$, folglich $x = \sqrt{(a^2 - 4b)}$.

§. 15.

§. 15.

Aufgabe: Eine Größe a verwandelt sich durch Wachsen oder Abnehmen innerhalb eines Jahres in x. Diese Größe x verwandelt sich im andern Jahre nach eben dieser Verhältniß; und so fort in jedem Jahre. Nach n Jahren ist aus a die Größe b geworden; man soll x finden.

Nach zwey Jahren ist $a : x = x : \frac{x^2}{a}$. Nach drey Jahren $a : x = \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2}$; folglich nach 4 Jahren $\frac{x^4}{a^3}$, und daher nach n Jahren $\frac{x^n}{a^{n-1}} = b$, folglich $x^n = b \cdot a^{n-1}$, folglich $x = \sqrt[n]{(b \cdot a^{n-1})}$.

Z. E. In einer Stadt war die Anzahl der Menschen 10000, welche in 15 Jahren zu 20000 angewachsen ist. Man setzt den Anwachs alle diese Jahre über gleichförmig, und frägt, in welcher Verhältniß der Anwachs geschehen ist. Da denn $\log. x = \frac{\log. 20000 + 14 \log. 10000}{15}$.

§. 16.

Aufgabe: Man soll drey Zahlen finden, wenn die Summe eines jeden Paars derselben gegeben ist. Die Summe der ersten und zweyten Zahl sey a, der ersten und dritten b, der zweyten und dritten c.

Nennt man die Summe aller drey Zahlen x: so ist offenbar x — a die dritte, x — b die zweyte, x — c die erste; folglich $(x - a) + (x - b) + (x - c) = x$; folglich $2x = a + b + c$, und $x = \frac{a + b + c}{2}$.

§. 17.

Aufgabe: Aus zwey Röhren fließt Wasser gleichförmig in ein Gefäß. Man läßt die erstere Röhre a Stunden, die andere b Stunden sich ergießen, und findet im Gefäß c Eymer. Ein andermal ergießt sich die erste Röhre d Stunden, die andere e Stunden, und man findet im Gefäß f Eymer. Man soll bestimmen, wie viel Eymer in der Stunde jede Röhre giebt.

Die erste gebe stündlich x, die andere y Eymer: so gab das einemal die erste ax, die andere by Eymer; das andremal die erste dx, die andre ey Eymer. Folglich ist $ax + by = c$, und $dx + ey = f$. Nach der ersten Gleichung ist $x = \frac{c - by}{a}$. Dieser Werth statt x in die zweyte Gleichung gebracht, giebt $\frac{cd - bdy}{a} + ey = f$, folglich $cd - bdy + aey = af$, folglich $(ae - bd)\, y = af - cd$, und $y = \frac{af - cd}{ae - bd}$. Dieser Werth statt y in die erste Gleichung gebracht, giebt $ax = c - \frac{abf - bcd}{ae - bd}$ $= \frac{ace - bcd - abf + bcd}{ae - bd}$, folglich $x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$.

Z. E. Es sey $a = 2$, $b = 3$, $c = 21$, $d = 7$, $e = 6$, $f = 51$: so ist $x = \frac{126 - 153}{12 - 21} = \frac{-27}{-9} = 3$, und $y = \frac{102 - 147}{12 - 21} = \frac{-45}{-9} = 5$. Wäre hingegen $a = 6$, $b = 4$, $c = 22$, $d = 9$, $e = 7$, $f = 31$: so wäre $x = \frac{154 - 124}{42 - 36} = \frac{30}{6} = 5$, und $y = \frac{186 - 198}{42 - 36} = \frac{-12}{6} = -2$; welches anzeigt, daß die eine Röhre jede Stunde 5 Eymer in das Gefäß schüttet, aus welchem durch

durch die andre Röhre stündlich zwey Eymer fließen. Diesen Umstand hätte man auch in die anfänglichen Gleichungen mit hinein bringen können.

§. 18.

Aufgabe: Es ist der Preis von verschiedenen aus einerley Dingen bestehenden Mischungen, nebst den Verhältnissen, nach welchen diese Dinge gemischt sind, gegeben; man soll den Preis eines jeden dieser Dinge finden.

Die Dinge A, B, C, sind in der ersten Mischung nach den Verhältnissen d, g, l; in der zweyten nach den Verhältnissen e, h, m; in der dritten nach den Verhältnissen f, k, n. Der Preis der ersten Mischung sey p, der zweyten q, der dritten r. Nennt man nun die Preise von A, B, C, x, y, z: so ist $dx + gy + lz = p$; $ex + hy + mz = q$; $fx + ky + nz = r$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{p - gy - lz}{d}$, aus der zweyten $x = \frac{q - hy - mz}{e}$; aus der dritten $x = \frac{r - ky - nz}{f}$. Verbindet man von diesen neuen Gleichungen die erste und zweyte, desgleichen die zweyte und dritte: so erhält man 1) $ep - egy - elz = dq - dhy - dmz$, folglich $\frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - dh} = y$, und wenn man $ep - dq = \alpha$, $dm - el = \beta$, $eg - dh = \gamma$ setzt, $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$. 2) $fq - fhy - fmz = er - eky - enz$, folglich $\frac{fq - er + enz - fmz}{fh - ek} = y$, und wenn man $fq - er = \delta$, $en - fm = \zeta$, $fh - ek = \theta$ setzt,

setzt, $\frac{\delta + \zeta z}{\theta} = y$. Verbindet man die beyden letzten Gleichungen: so erhält man $\alpha\theta + \beta\theta z = \gamma\delta + \gamma\zeta z$, folglich $\frac{\alpha\theta - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$. Hieraus läßt sich $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$, und hierauf auch $\frac{p - gv - lz}{d} = x$ bestimmen.

Z. E. Es kaufte Jemand 40 Scheffel Weitzen, 24 S. Gersten, 20 S. Hafer, zusammen für 15 ℔ 12 ßl. oder für $15\frac{3}{5}$ ℔; ferner 26 S. W. 30 S. G. 50 S. H. zusammen für 16 ℔; ferner 24 S. W. 120 S. G. 100 S. H. zusammen für 34 ℔: so geben obige Formeln, wenn man diese Zahlen statt der Buchstaben setzt, den S. W. zu 5, den S. G. zu 3, und den S. H. zu 2 ßl. im Durchschnitt.

Anmerkung. Wenn man diese Aufgabe umkehrt, und aus den festgesetzten Preisen die Verhältnisse der Mischungen findet: so nennen dies die gemeinen Rechenmeister die Alligationsregel. II. §. 91.

III. Gemischte quadratische Gleichungen.

§. 19.

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung ist $x^2 - px - q = 0$; worinn die Wurzel x gleich ist, dem mit dem entgegengesetzten Zeichen belegten halben Coëfficienten des zweyten Gliedes, nebst der mit beyden Zeichen belegten Quadratwurzel aus der Summe des mit dem entgegengesetzten Zeichen belegten dritten Gliedes und des Quadrats obgedachten halben Coëfficientens. Oder $x = \frac{1}{2}p \mp r(q + \frac{1}{4}p^2)$.

Denn da $x^2 - px = q$: so ist $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$; folglich $x - \frac{1}{2}p = \mp r(q + \frac{1}{4}p^2)$, folglich

$x = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$. Auch auf folgende Art kann der Beweis geführt werden. Man setze $x = y + \frac{1}{2}p$, und bringe diesen Werth anstatt x in die Gleichung: so ist $x^2 = y^2 + py + \frac{1}{4}p^2$, und $px = py + \frac{1}{2}p^2$, folglich $x^2 - px - q = y^2 + py + \frac{1}{4}p^2 - py - \frac{1}{2}p^2 - q = 0$, folglich $y^2 - \frac{1}{4}p^2 - q = 0$, folglich $y^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, folglich $y = \mp \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$. Nun war $x = y + \frac{1}{2}p$. Folglich ist $x = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

Zusatz. Jede Gleichung von der Form $x^{2m} - px^m - q = 0$, kann nach der Art der quadratischen Gleichungen aufgelößt werden. Denn setzt man $x^m = y$: so ist $y^2 - py - q = 0$; folglich $x^m = y = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$; folglich $x = \sqrt[m]{\frac{1}{2}p \mp \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}}$.

§. 20.

Aufgabe. Man soll vier stetig proportionirte Zahlen finden, so daß die Summe der beyden mittlern 12, der beyden äussern aber 20 betrage.

Nennt man die zweyte dieser Zahlen x: so ist die dritte $12 - x$, folglich die erste $\frac{x^2}{12 - x}$, und die vierte $\frac{144 - 24x + x^2}{x}$. Demnach hat man $\frac{x^2}{12 - x} + \frac{144 - 24x + x^2}{x} = 20$, oder $\frac{144 - 24x + x^2}{x} = 20 - \frac{x^2}{12 - x}$; folglich $144 - 24x + x^2 = 20x - \frac{x^3}{12 - x} = \frac{240x - 20x^2 - x^3}{12 - x}$; folglich $1728 - 432x + 36x^2 - x^3 = 240x - 20x^2 - x^3$; folglich $1728 - 672x + 56x^2 = 0$; folglich $3\frac{6}{7} - 12x + x^2 = 0$, oder $x^2 - 12x + 3\frac{6}{7} = 0$. Demnach ist $x = 6 \mp \sqrt{(- 3\frac{6}{7} + 36)}$. Aus dieser zweyten Zahl x ergeben sich denn nach dem obigen die übrigen verlangten Zahlen.

§. 21.

Aufgabe. Man soll drey stetig proportionirte Zahlen finden, wenn die Summe derselben 20, und die Summe ihrer Quadrate 140, gegeben ist.

Nennt man die beyden ersten dieser gesuchten Zahlen x, y: so ist die dritte $\frac{y^2}{x}$; folglich $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$; folglich $x^2 + yx + y^2 = 20x$; folglich $x^2 + (y - 20)x + y^2 = 0$, folglich $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}y^2)}$. Subtrahirt man diesen Werth der ersten Zahl x, und die zweyte Zahl y, von 20: so bleibt die dritte Zahl $\frac{y^2}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}y^2)}$. Macht man nun die Quadrate dieser drey Zahlen, und addirt solche: so erhält man $400 - 40y = 140$, folglich $y = 6\frac{1}{2}$. Bringt man diesen Werth anstatt y in die vorher gefundne Gleichung für x: so erhält man $x = 6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$, folglich nach obigen die dritte Zahl $= 6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$.

Anmerkung 1. Für cubische und biquadratische Gleichungen sind schon im sechzehnten Jahrhunderte Auflösungen gefunden worden; und zwar für erstere vom Scipio Ferreo, welche Cardan, für letztre von Lud. Ferrari, welche Bombelli bekannt machte. Daher heißen diese Methoden Cardans und Bombelli's Regeln.

2. Noch ist zu bemerken, wenn in einer quadratischen Gleichung von der Form $x^2 - px + q = 0$, $q > \frac{1}{4}p^2$ ist, daß alsdenn die Wurzeln unmöglich sind. Denn in solchem Falle hat man $x = \frac{1}{2}p \mp \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, wo $\frac{1}{4}p^2 - q$ negativ, folglich II. §. 49. die Quadratwurzel daraus unmöglich ist.

Zwey-

Zweytes Capitel.
Von den unbestimmten Aufgaben.

I. Natur der unbestimmten Aufgaben.

§. 22.

Werden in einer Aufgabe mehrere unbekannte Grössen gesucht, und zugleich Data genug ertheilt, um daraus so viel Gleichungen als unbekannte Grössen gefodert werden, zu formiren: so ist die Aufgabe bestimmt. Reichen hingegen die Data nicht zu eben so viel Gleichungen zu, als unbekannte Grössen vorhanden sind: so ist die Aufgabe unbestimmt. Im letztern Fall kann man für so viel unbekannte Grössen, als Gleichungen fehlen, willkührliche Werthe setzen; doch sind gemeiniglich in der Aufgabe Bedingungen enthalten, welche die Anzahl der willkührlichen Werthe, die sonst über alle Grenzen stiege, sehr einschränken. Die Lehre von Auflösung solcher unbestimmten Aufgaben heißt die unbestimmte Analytik, welche oft ganz besondre Kunstgriffe erfodert, und für Anfänger vorzüglich dient, ihren Verstand aufzuklären, und ihnen eine grössere Fertigkeit in analytischen Rechnungen zu verschaffen.

Zusatz. Zuweilen scheint es, als ob man so viele Gleichungen machen könne, als unbekannte Grössen gesucht werden; und die Aufgabe ist doch unbestimmt. Dieser Fall eräugnet sich, wenn einige Data verschieden zu seyn scheinen, die doch im Grunde nur ein und dasselbe

unter verschiedener Gestalt sind; welches sich aber wenigstens bey der Reduction der Gleichungen offenbaret. Z. E. man sucht zwey Zahlen, so, daß ein Viertel ihrer Summe 48, und die Hälfte samt einem Viertel ihrer Summe 144 betrage. Nennt man die Zahlen x, y: so ist $\frac{x+y}{4} = 48$ folglich $x = 192 - y$; und $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})(x+y) = 144$, folglich $x = 192 - y$, das nemliche wieder. Demnach giebt die Aufgabe für die beyden unbekannten Zahlen in der That nur eine und dieselbe Gleichung, und ist also unbestimmt; welches man auch gleich anfangs hätte bemerken können. Denn wenn man sagt, der vierte Theil einer Grösse ist 48: so heißt dies mit andern Worten, die Hälfte samt einem Viertel, das ist, $\frac{3}{4}$ dieser Grösse ist 3mal 48, oder 144.

Anmerkung. Ueberhaupt macht das letzte Resultat bey Reduction der Gleichungen das unrichtige oder fehlerhafte in den Bedingungen der Aufgabe offenbar. Z. E. hätte eine Aufgabe auf die Gleichungen geführt, $2x + 3y = 20$, und $4x + 6y = 30$: so erhält man daraus $y = \frac{20 - 2x}{3} = \frac{30 - 4x}{6}$, folglich $120 - 12x = 90 - 12x$, oder $120 = 90$, welches unmöglich ist. Solte daher die Analysis nicht im Stande seyn, alle Fragen zu beantworten: so dient sie doch gewiß dazu, die Absurdität der Frage oder die Ignoranz des Fragenden zu verrathen.

§. 23.

Eine unbestimmte Aufgabe ist einfach, wenn die unbekannten Grössen nur in der ersten Dimension, auch nicht mit einander multiplicirt darinnen vorkommen; zusammengesetzt hingegen, welche höhere Dimensio-

mensionen, oder auch Producte der unbekannten Größen enthält.

Zusatz 1. Diejenigen einfachen unbestimmten Aufgaben, wo man aus zwey Gleichungen drey oder auch mehrere unbekannte Grössen finden soll, werden von den gemeinen Rechenmeistern auf sehr mangelhafte Art unter dem barbarischen Namen *regula coeci* behandelt. (II. §. 91.)

2. Die unbestimmten Aufgaben, besonders die von der zusammengesetzten Art, begreift man auch unter dem Namen der diophantischen Analysis, weil Diophantus viele solche Aufgaben aufgelößt hat. Sie waren den Alten schätzbar, weil sie mittelst derselben die Irrationalzahlen eliminiren konnten.

§. 24.

Bey den einfachen unbestimmten Aufgaben kommt die Hauptsache darauf an, daß man von den gesuchten Grössen einige, welche man will, und so viele, als die Zahl der Gleichungen es verstattet, zugleich aber auch die Einschränkungen bestimme, denen die übrigen nicht zu bestimmenden unterworfen sind; daß man hierauf diesen übrigen alle mögliche Werthe, welche mit obgedachten Einschränkungen bestehen könne, beylege; daß man endlich diese Werthe in die bereits gefundnen Endgleichungen, einen nach den andern, übertrage, um der vorgelegten Aufgabe durch die verschiedenen möglichen Auflösungen ein Genüge zu leisten.

Zusatz. Es ist also nicht hinreichend, wie die so genannte regula coeci thut, eine oder ein Paar Antworten auf die Frage zu geben; sondern man muß, wie die unbestimmte Analytik lehret, ein vollständiges Register

aller möglichen Beantwortungen der vorgelegten Frage darstellen.

§. 25.

In den zusammengesetzten unbestimmten Aufgaben ist der leichtere Fall, daß die eine unbekannte Grösse y in der ersten, die übrigen aber, als x, in höhern Dimensionen vorkommen; der gewöhnlichere Fall aber, daß auch y und demnach alle unbekannte Grössen x u. s. w. in höhern Dimensionen vorhanden sind. Im ersten Falle hat man zwar Formeln zur Berechnung, sie sind aber, weil es sich nicht oft so trift, selten anzuwenden. Im zweyten Falle, kommt, wenn man y bestimmt, x u. s. w. in der zweyten und noch höhern Dimensionen hinter das Wurzelzeichen; da denn die Hauptsache und die größte Kunst der unbestimmten Analytik darauf beruhet, solche Werthe für x ausfündig zu machen, daß die Wurzelzeichen, oder die Irrationalität eliminirt werden.

Anmerkung. Mehreres von der Theorie der unbestimmten Analytik findet man unter andern in **Leonhard Eulers** vollständigen Anleitung zur Algebra. Was hier davon angeführt worden, soll nur dienen einen allgemeinen Begrif von diesem wichtigen Theile der Analysis zu geben, zu dessen Ausbildung nur noch einige Beyspiele in den nun folgenden Aufgaben gehören.

II. Einfache unbestimmte Aufgaben.

§. 26.

Aufgabe. Für 20 rthlr. sollen 20 Maaß Wein von viererley Sorten gekauft werden: Ungerscher p Maaß zu 4 rthlr. Champagner q M. zu 2 rthlr. Rheinwein r M. zu 1 rthl. und Franzwein s M. zu $\frac{1}{2}$ rthl.

Für

[illegible]

[illegible]

[illegible]

II. Einfache unbestimmte Aufgaben.

[illegible]

Aufgabe. [illegible]

Für die 4 unbekannten Größen p, q, r, s, finden sich in der Aufgabe nur 2 Gleichungen. Denn der Preiß giebt $4p + 2q + r + \frac{1}{2}s = 20$, und die Quantität $p + q + r + s = 20$. Hieraus lassen sich zwey, welche man will, z. E. r und s, und für die beyden übrigen p und q, die nöthigen Einschränkungen bestimmen.

Die zweyte Gleichung von der ersten subtrahirt giebt $3p + q - \frac{1}{2}s = 0$, folglich $3p + q = \frac{s}{2}$, oder $6p + 2q = s$. Die erste Gleichung giebt $r = 20 - 4p - 2q - \frac{1}{2}s$, oder wenn man den gefundenen Werth statt $\frac{1}{2}s$ setzt, $r = 20 - 7p - 3q = 20 - (7p + 3q)$. Folglich muß, wenn r eine positive ganze Zahl seyn soll, wie die Aufgabe fodert, $7p + 3q < 20$ seyn. Unter dieser Einschränkung setze man alle mögliche Werthe für p und q: so geben die gefundenen Gleichungen die Werthe für r und s, wie folget:

p.	q.	r.	s.
1.	1.	10.	8.
1.	2.	7.	10.
1.	3.	4.	12.
1.	4.	1.	14.
2.	1.	3.	14.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieser Solution diene z. E. der fünfte Fall, wo man vom Ungerschen 2 Maaß und vom Champagner 1 Maaß nimmt, also $p = 2$, $q = 1$ setzt, welches verstattet wird, weil alsdenn $7p + 3q = 14 + 3 < 20$. Alsdenn aber ist nach den gefundnen Gleichungen $r = 20 - (7p + 3q) = 20 - 17 = 3$, und $s = 6p + 2q = 12 + 2 = 14$. Nimmt man daher vom Ungerschen 2, vom Champagner 1 Maaß: so muß man vom Rheinwein 3, und vom Franzwein 14 Maaß nehmen; welches zusammen 20 Maaß ausmacht, die nach dem angesetzten Preiße 20 rthl. betragen.

Wolte man hingegen vom Ungerschen 2 Maaß und vom Champagner auch 2 Maaß nehmen: so wäre $7p + 3q = 20$ gegen die Einschränkung. Dies kann zugleich den folgenden Solutionen zur Erläuterung dienen.

§. 27.

Aufgabe. Es sollen für 20 rthl. ein Dutzend Paar Strümpfe eingekauft werden; seidne p Paar zu 3 rthl., feine wollene q Paar zu 1 rthl. und baumwollene r Paar zu $\frac{1}{2}$ rthl.

Für die 3 unbekannten Grössen p, q, r, finden sich in der Aufgabe nur 2 Gleichungen. Denn der Preiß giebt $3p + q + \frac{1}{2}r = 20$, und die Quantität $p + q + r = 12$. Hieraus lassen sich zwey, etwa q und r, und für die dritte p die nöthigen Einschränkungen bestimmen. Die zweyte Gleichung von der ersten subtrahirt giebt $2p - \frac{1}{2}r = 8$, oder $4p - r = 16$, folglich $4p - 16 = r$, folglich, da r eine ganze positive Zahl seyn soll, $4p > 16$, oder $p > 4$. Setzt man den gefundenen Werth von r in die erste Gleichung: so erhält man $5p + q = 28$, folglich $q = 28 - 5p$, und daher $5p < 28$, oder $p < 5\frac{3}{5}$. Demnach muß $p = 5$ seyn. Dies giebt $q = 3$, und $r = 4$, folglich nach den Bestimmungen der Aufgabe nur eine mögliche Auflösung.

Anmerkung. Hätte man die Preiße gesetzt zu $3\frac{2}{3}$, 1, $\frac{2}{3}$: so hieße die erste Gleichung $3\frac{2}{3}p + q + \frac{2}{3}r = 20$, oder $11p + 3q + 2r = 60$. Subtrahirt man hievon die zweyte Gleichung doppelt $2p + 2q + 2r = 24$: so erhält man $9p + q = 36$, folglich $q = 36 - 9p$, und daher $9p < 36$, oder $p < 4$. Subtrahirt man die zweyte Gleichung von der ersten anfänglichen: so erhält man $2\frac{2}{3}p - \frac{1}{3}r = 8$, oder $8p - r = 24$, folglich $8p - 24 = r$, folglich $8p > 24$ oder $p > 3$. Nun war vorher $p < 4$.

Daher

Daher ist unter diesen besondern Bestimmungen gar keine Auflösung möglich.

§. 28.

Aufgabe. Ein Münzmeister hat dreyerley Silber 14, 11, und 9 löthiges, und soll 30 Mark 12 löthiges daraus machen. Wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x, von der zweyten y, und von der dritten z Mark: so ist $x + y + z = 30$, oder $9x + 9y + 9z = 270$, die erste Gleichung. Nun wird diese Masse an Silber enthalten $14x + 11y + 9z$ Loth und wiegt 30 Mark, wovon jede 12 Loth Silber enthalten soll, folglich zusammen 360 Loth. Demnach hat man die zweyte Gleichung $14x + 11y + 9z = 360$. Subtrahirt man davon die erste: so erhält man $5x + 2y = 90$, folglich $2y = 90 - 5x$, oder $y = 45 - \frac{5}{2}x$, folglich x eine gerade Zahl und $\frac{5}{2}x < 45$, oder $5x < 90$, und daher $x < 18$. Es war aber nach der ersten Gleichung $z = 30 - x - y$, folglich, den gefundnen Werth für y gesetzt, $z = 30 - x - 45 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}x - 15$, folglich $\frac{3}{2}x > 15$, oder $3x > 30$, und daher $x > 10$. Soll also x gerade seyn und > 10, aber < 18: so kann x nichts anders seyn, als entweder 12, oder 14, oder 16. Daher ist nach den gefundenen Gleichungen

x	y	z
12.	15	3
14.	10	6
16.	5	9

III. Zusammengesetzte unbestimmte Aufgaben.

§. 29.

Aufgabe. Man soll zwey Quadratzahlen finden, deren Differenz auch eine Quadratzahl ist.

Ist x die halbe Summe der beyden gesuchten Zahlen, und y ihre halbe Differenz: so ist die grössere $x + y$, und die kleinere $x - y$. Nennt man nun die Differenz ihrer Quadrate z^2: so ist $(x + y)^2 - (x - y)^2 = z^2$, oder $4xy = z^2$, folglich $xy = \frac{z^2}{4}$. Es ist aber z^2 sowohl als 4, folglich der ganze Bruch, folglich auch xy ein Quadrat. Demnach nehme man eine jede Quadratzahl, die sich in ungleiche Factoren zerlegen läßt, z. E. $36 = 9 \cdot 4$, so ist die gesuchte grössere Zahl $= 9 + 4 = 13$, und die kleinere $= 9 - 4 = 5$, und allemal $(13^2 - 5^2)$ eine Quadratzahl.

§. 30.

Aufgabe. Man soll eine Quadratzahl x^2 finden, welche von einer gegebenen Quadratzahl a^2, subtrahirt, zur Differenz eine Quadratzahl y^2, habe.

Hiernach ist $a^2 - x^2 = y^2$. Nun sey $y = a - px$: so ist $a^2 - x^2 = a^2 - 2apx + p^2 x^2$, folglich $x^2 = 2apx - p^2 x^2$, oder $x = 2ap - p^2 x$, folglich $x + p^2 x = (1 + p^2) x = 2ap$, folglich $x = \frac{2ap}{1 + p^2}$. Nun nehme man a und p wie man will, nur rational, so wird auch x, folglich auch y rational werden.

Z. E. Es sey $a = 10$, $p = \frac{1}{2}$: so ist $x = \frac{10}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{40}{5} = 8$, und $y = 10 - 4 = 6$, auch $100 - 64 = 36$. Es sey $a = 7$, $p = 3$: so ist $x = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3}{1 + 9} = 4, 2$ u. s. w.

§ 91.

Aufgabe. [illegible] Quadratzahlen [illegible] Quadratzahl [illegible] eines Quadratzahl [illegible] gebe.

[illegible] ist $x^2 + x^2 = y^2$ [illegible] folglich [illegible]

[illegible]

B. G. [illegible]

und $y = 17$, [illegible]

§ [illegible]

Aufgabe. Man soll [illegible] finden, [illegible] Quadratzahl [illegible] ganze Zahlen seyn.

Es sey $x^2 + y^2 = z^2$, [illegible] folglich [illegible] ist [illegible] Setzt man nun [illegible] so ist [illegible]

und $zy = n^2 m$. Nun ist [illegible] Folglich ist [illegible] Ebenfalls [illegible]

[illegible]

x und z ganze Zahlen seyn sollen: so müssen sich die Zähler der Brüche mit 2 dividiren lassen. [illegible] gerade, [illegible] so muß [illegible] Ist aber [illegible] gerade [illegible] seyn.

Man

§. 31.

Aufgabe. Man soll eine Quadratzahl x^2, finden, welche zu einer gegebnen Quadratzahl a^2, addirt, zur Summe eine Quadratzahl y^2, habe.

Hiernach ist $a^2 + x^2 = y^2$. Man setze $y = p + x$: so ist $a^2 + x^2 = p^2 + 2px + x^2$, folglich $a^2 - p^2 = 2px$, und $\frac{a^2 - p^2}{2p} = x$.

Z. E. Es sey $a = 8$, $p = 2$; so ist $x = \frac{60}{4} = 15$, und $y = 17$, auch $8^2 + 15^2 = 17^2$.

§. 32.

Aufgabe. Man soll zwey Quadratzahlen finden, deren Summe auch eine Quadratzahl ist; doch sollen alle ganze Zahlen seyn.

Es sey $x^2 + y^2 = z^2$, folglich $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$, folglich $z + x > y$. Es sey daher $z + x = ny$, wo n eine ganze Zahl seyn muß: so ist $z - x = \frac{y}{n}$. Setzt man nun $\frac{y}{n} = m$, so ist $y = nm$, und $ny = n^2m$. Nun ist $z = \frac{z + x}{2} + \frac{z - x}{2}$. Folglich ist $z = \frac{n^2m}{2} + \frac{m}{2} = \frac{n^2 + 1}{2}.m$. Eben so ist auch $x = \frac{z + x}{2} - \frac{z - x}{2} = \frac{n^2m}{2} - \frac{m}{2} = \frac{n^2 - 1}{2}m$. Da nun z und x ganze Zahlen seyn sollen: so müssen sich die Zähler der Brüche mit 2 dividiren lassen. Ist daher m ungerade, so muß $n^2 \mp 1$ gerade, folglich n ungerade seyn; ist aber m gerade, so kann $n^2 \mp 1$, folglich auch n, gerade oder ungerade seyn.

Wäre z. E. m = 1, folglich ungerade: so kann man für n alle ungerade Zahlen setzen. Alsdenn aber ist

$$y = mn = \quad 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \ldots$$

$$x = \frac{n^2 - 1}{2} m = 0,\ 4,\ 12,\ 24, \ldots$$

$$z = \frac{n^2 + 1}{2} . m = 1,\ 5,\ 13 \ldots$$

Wäre hingegen m = 2, folglich gerade: so kann man für n jede ganze Zahl setzen. Alsdenn ist

$$y = mn = \quad 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10 \ldots$$

$$x = (n^2 - 1)\frac{m}{2} = 0,\ 3,\ 8,\ 15, \ldots$$

$$z = (n^2 + 1)\frac{m}{2} = 2,\ 5,\ 10,\ 17, \ldots$$

Zwey=

Zweyter Abschnitt.

Die analytische Geometrie.

1. Von den bestimmten Aufgaben.
2. Von den unbestimmten Aufgaben.

Erstes Kapitel.

Von den bestimmten Aufgaben.

[illegible]

[illegible]

Zweyter Abschnitt.

die analytische Geometrie.

1. Von den bestimmten Aufgaben.
2. Von den unbestimmten Aufgaben.

Erstes Kapitel.

Von den bestimmten Aufgaben.

I. Grundlehren.

§. 1.

Die analytische Geometrie hat ausgedehnte Grössen, die Algebra hingegen Zahlen, oder auch allgemeine Grössen, zum Gegenstande. Werden die Aufgaben für ausgedehnte Grössen nur durch Linien aufgelößt: so heißt dies die geometrische Analysis, oder die geometrische Auflösung der Aufgaben; werden sie hingegen durch Gleichungen, statt der Linien, aufgelößt: so heißt dies die algebraische Auflösung der Aufgaben.

Zur geometrischen Auflösung wird erfodert, daß man die über ausgedehnte Grössen vorgelegte Frage, in die darinn enthaltenen einfachen Fragen zerlege; jede derselben, mit Ausschliessung der Arithmetik und Algebra, nur mittelst der reinen Geometrie durch Verzeichnung gewisser Linien beantworte; und durch Verbindung aller dieser einzelnen Antworten der vorgelegten Frage ein Genüge leiste. Dies war vorzüglich das Geschäfte der alten Geometer,

Geometer, welche auf diesem Wege, den wir auch noch oft, selbst bey algebraischen Arbeiten, betreten müssen, zu ihrem synthetischen Vortrage gelangten, dem die in Geheim gebrauchten Kunstgriffe nicht mehr anzumerken waren.

Zur algebraischen Auflösung wird erfodert, daß man die ausgedehnten Grössen, von denen die Rede ist, als Zahlen, oder auch als allgemeine Grössen, ansehe; die einzelnen Fragen oder Bedingungen einer Aufgabe in Gleichungen bringe, welche statt der Zeichnung den einzelnen Bedingungen ein Genüge leisten; und alle diese Gleichungen durch die algebraischen Kunstgriffe so geschickt verbinde, daß dadurch das Gesuchte der Hauptfrage gänzlich bestimmt werde.

Die analytische Geometrie, wenn sich solche nur auf algebraische Auflösungen einschränkt, ist demnach nichts anders, als ein Theil der Algebra, oder vielmehr eine Anwendung der Algebra auf die Geometrie, das ist, eine Anwendung der Methode für allgemeine Fragen auf die geometrischen Fragen.

Anmerkung 1. Die erste unter den folgenden Aufgaben soll so behandelt werden, daß die hier gegebnen Begriffe sich vollends aufklären werden; wie denn überhaupt die folgenden Aufgaben den hiermit angefangenen Grundlehren zur Erläuterung dienen.

2. Mehreres von der Analysis der Alten findet man in Euklids Data übersetzt von Schwab. Stuttgardt. 1780. Einige Beyspiele von synthetischen und analytischen Beweisarten findet man in Euklids Elementen den fünf ersten Sätzen des dreyzehnten Buchs angehängt.

3. Oft hat man bey Auflösung geometrischer Aufgaben nicht nöthig, seine Zuflucht zur Algebra zu nehmen, sondern

sondern kann solche viel leichter aus den allgemein bekannten Eigenschaften der Figur herleiten; daher man dieses allemal erst versuchen muß, ehe man an den Calculus gehet. Zuweilen trift es sich auch, daß die Aufgaben Bedingungen enthalten, welche sich nicht algebraisch ausdrücken lassen; in welchem Falle man also genöthigt ist, die Solution blos aus geometrischen Betrachtungen herzuleiten.

§. 2.

Aufgabe. Eine geometrische Frage in eine Gleichung zu bringen.

Die Formirung einer Gleichung für ausgedehnte Grössen erfodert, daß man den ungefehren Entwurf einer Figur mache, worin man alle Grössen, die in der Aufgabe enthalten sind, bekannte so wohl, als unbekannte, als wenn leztre schon gefunden wären, verzeichne; daß man diese Grössen ohne Unterschied mit einander vergleiche, um zu erforschen, welche darunter geschickt sind, die übrigen zu bestimmen; und daß man diese als gegebene, die übrigen als gesuchte benenne, und solche, wie es ihre Beziehung auf einander mit sich bringt, mit algebraischen Ausdrücken belege. Zu allen diesen nimmt man die Hülfsmittel aus der ganzen Geometrie, und besonders aus der Lehre von der Aenlichkeit der Figuren, und von der Proportion beym Cirkel.

Zusatz. Bey geometrischen Aufgaben kommt es nicht nur auf die Grössen selbst, sondern oft auch auf ihre Lage an, welche man durch Winkel bestimmt. Sind Lagen einander entgegengesetzt: so werden solche durch das Zeichen des positiven und negativen von einander unterschieden.

§. 3.

§. 3.

Aufgabe. Einen Winkel mit in eine Gleichung zu bringen. Fig. 188.

Da die Grösse eines Winkels weder durch Linien, noch Flächen, noch Körper ausgedruckt werden kann; aber auch ein Winkel in der Gleichung nicht anders vorkommt, als in so fern man ihn mit einem andern Winkel vergleicht: so kann jedesmal anstatt des Winkels eine gewisse Verhältniß gebraucht werden, dergestalt, daß mit dem Winkel auch solche Verhältniß, und mit solcher Verhältniß auch der Winkel zugleich gegeben ist.

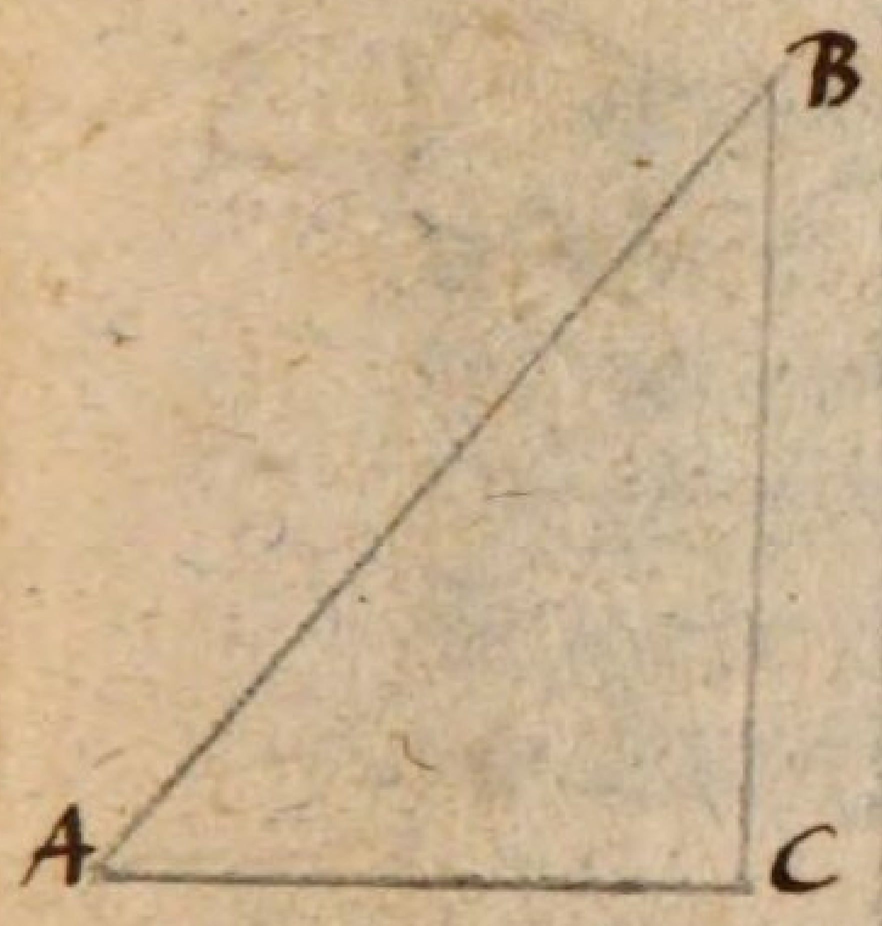
Ist demnach der Winkel BAC gegeben, und von einem willkürlichen Punkte B des einen Schenkels, die Linie BC auf dem andern Schenkel senkrecht: so sind auch die Verhältnisse AB : BC, und AC : BC, folglich auch AB : AC gegeben; weil, wo auch immer in AB der Punkt B angenommen sey, alle daher entstehenden Triangel ånlich sind, und also eben die Verhältnisse geben.

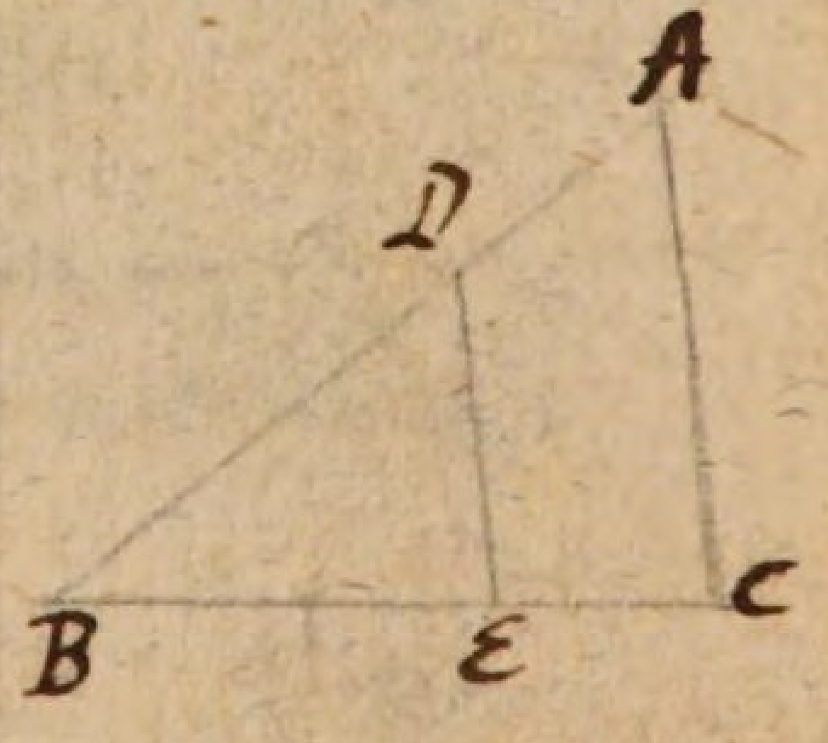
Eben so, ist die Verhältniß AC : BC gegeben, und man verbindet diese Linien unter einem rechten Winkel, und ziehet die dritte Seite AB: so entstehen gleichfalls ånliche Triangel, worinn die Winkel A und B dieselben bleiben. Ein gleiches gilt auch von den Verhältnissen AB : AC, und AB : BC.

Zusatz 1. Die Linie BC braucht nicht senkrecht zu seyn, wenn nur der Winkel C auch gegeben ist; indem man aus den gegebenen Verhältnissen drey Linien finden, und aus diesen den Triangel zusammensetzen kann.

2. Ist der Winkel C ein rechter, so lassen sich die gegebenen Verhältnisse auch trigonometrisch auf mannichfaltige Art ausdrücken.

§. 4.


B
A
C


A
D
B
E
C

§. 4.

Die Reduction und gänzliche Solution der formirten Gleichung ist mit dem, was davon in der Algebra gelehrt worden, völlig übereinstimmig, nur mit dem Unterschiede, daß zu allen diesen die geometrische Construction noch hinzu kommen müsse, welche auch unmittelbar mit der formirten Gleichung ohne so viele, oft ohne alle Reduction, vorgenommen werden kann.

§. 5.

Die geometrische Construction einer Gleichung geschiehet, indem man den Algebraischen Ausdruck in die geometrische Sprache überträgt, und nach deren Vorschrift die Figur verzeichnet; wodurch denn die Aufgabe völlig aufgelößt ist, das heißt, die Wurzeln der Gleichung in Linien gefunden sind.

Zusatz. Die geometrische Construction der Gleichungen ist nicht auf geometrische Aufgaben allein eingeschränkt, sondern erstreckt sich auch auf alle algebraische Aufgaben; wodurch man denn eine neue Methode erhält, die Wurzeln einer Gleichung zu finden.

§. 6.

Aufgabe. Jede Gleichung, wenn sie nur eine unbekannte Grösse enthält, und nicht über zwey Dimensionen hat, geometrisch zu construiren. Fig. 189. 190. 191. 192.

1. Es sey $x = a. b$, oder $y = \frac{x}{a}$. Man ziehe Fig. 189. zwey gerade Linien AB, BC, unter einem beliebigen Winkel, mache $BD = 1$, $BA = a$, $BE = b$, ziehe DE, und mit ihr durch A die AC parallel: so ist $BC = x$; weil

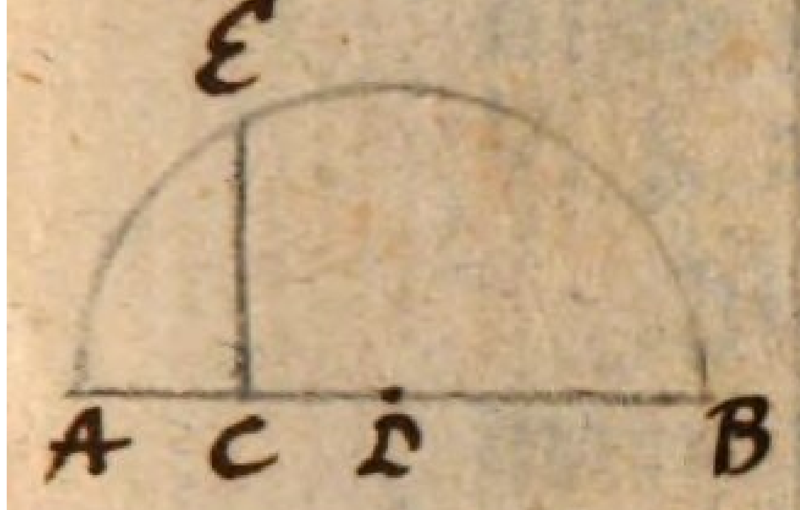
BD : BA = BE : BC, das ist, $1 : a = b : x$. Eben so macht man BD = 1, BA = a, BC = x, ziehet AC, und mit ihr durch D die DE parallel: so ist BE = y; weil BA : BD = BC : BE, das ist, $a : 1 = x : y$.

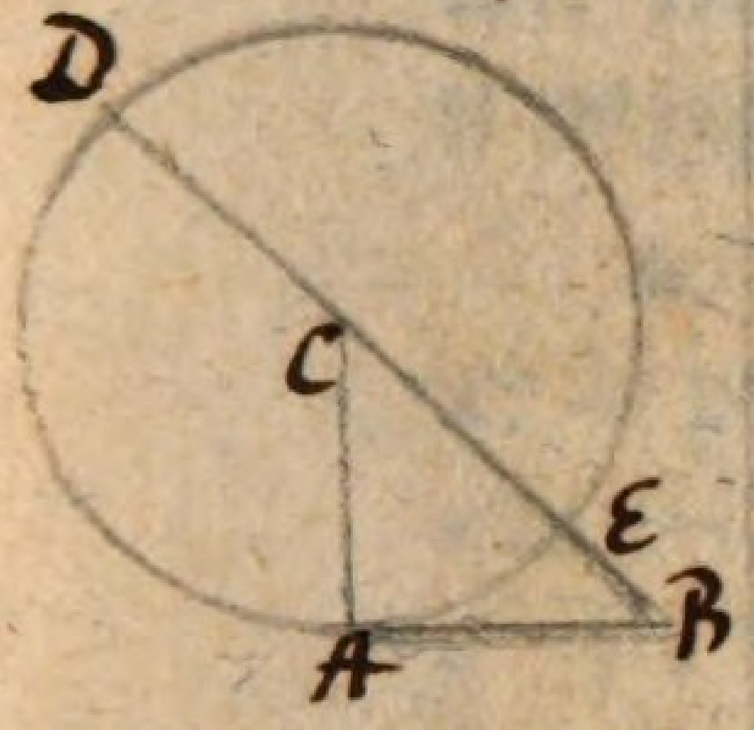
2. Es sey $x = \sqrt{p}$. Auf der geraden Linie AB, Fig. 190. sey AC = 1, CB = p. Halbirt man nun AB in D, beschreibt mit DA einen Cirkel, und macht CE senkrecht: so ist CE = x, weil AC : CE = CE : CB, das ist, $1 : x = x : p$.

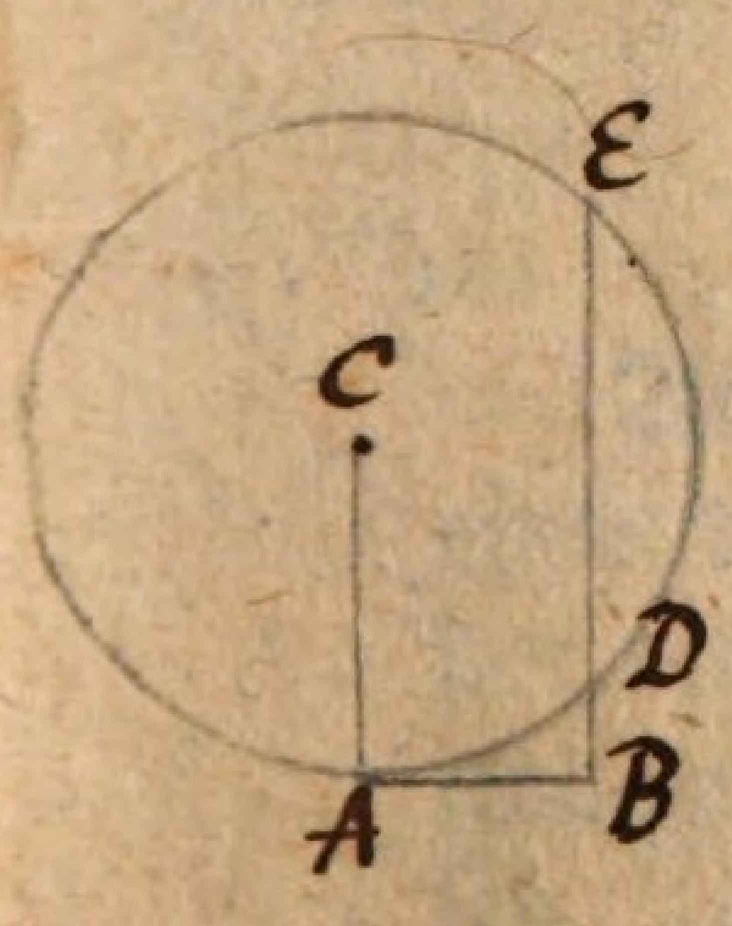
3. Es sey $x^2 \mp ax - b^2 = 0$. Man mache Fig. 191. CA senkrecht auf AB, auch $AC = \frac{1}{2}a$, und AB = b, ziehe BCD, und aus C mit CA einen Cirkel: so ist sowohl $BD = -x$ und $BE = +x$, als auch $BE = -x$ und $BD = +x$. Denn ist $BD = -x$, so ist $BC = -x - \frac{1}{2}a$, folglich $BC^q = x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$. Nun ist $BC^q = AC^q + AB^q$. Folglich ist $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$, folglich $x^2 + ax - b^2 = 0$. Ist $BE = + x$: so ist $BC = x + \frac{1}{2}a$, folglich eben so $x^2 + ax - b^2 = 0$. Ist $BE = -x$, so ist $BC = \frac{1}{2}a - x$, folglich $BC^q = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 = AC^q + AB^q = \frac{1}{4}a^2 + b^2$, folglich $x^2 - ax - b^2 = 0$. Ist $BD = + x$, so ist $BC = x - \frac{1}{2}a$, folglich eben so $x^2 - ax - b^2 = 0$.

Hätte man die Gleichung $x^2 + ax - b^2 = 0$ vorher aufgelößt, und gefunden $x = -\frac{1}{2}a \mp \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)}$: so erhielte man durch eben die Construction diese Wurzeln BE, BD.

4. Es sey $x^2 - ax + b^2 = 0$. Man mache Fig. 192. CA senkrecht auf AB, auch $AC = \frac{1}{2}a$, und AB = b, ziehe aus C mit CA einen Cirkel, und durch B der AC die BDE parallel: so sind BD, BE, die gesuchten Wurzeln; weil III. §. 148. $AB^q = BD \cdot BE$, woraus sich die Gleichung so wie in num. 3. leicht formiren läßt.


E
A C D B


D
C
E
A B


E
C
D
A B

Zusatz. Solte die BE den Cirkel weder schneiden, noch berühren: so zeigt dies an, daß die Gleichung unmögliche Wurzeln habe, und daß also auch keine geometrische Construction möglich sey. Man vergleiche hiemit V. §. 21. Anmerk. 2.

Anmerkung 1. Es lassen sich von Gleichungen auf mannichfaltige Art geometrische Constructionen machen; diese aber sind als die leichtesten, und zugleich aus dem Grunde angezeigt worden, weil sie vom Cartesius, welcher die Algebra in der Geometrie zuerst eingeführt hat, so angegeben sind.

2. Von der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 \mp px \mp q = 0$, findet man geometrische Constructionen III. §. 152. 153. wie auch von der Gleichung $x^2 = a^2 \mp b^2$, III. §. 65. Zus. und §. 98 *. Doch soll erstere §. 13. näher entwickelt werden.

§. 7.

Eine geometrische Aufgabe ist eben so, wie eine algebraische, bestimmt oder unbestimmt, je nachdem die Aufgabe eben so viele Gleichungen, als unbekannte Größen vorhanden sind, darbietet, oder nicht.

Anmerkung. Von der Beschaffenheit unbestimmter geometrischer Aufgaben handelt das folgende Kapitel; hier ist nur von bestimmten Aufgaben die Rede.

II. Einfache Gleichungen.

§. 8.

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie AB, einen rechtwinklichten Triangel zu beschreiben, so daß der rechte Winkel der gegebenen Linie entgegengesetzt, und der Triangel einem gegebenen Quadrate Q gleich sey. Fig. 193.

1. Geometrische Auflösung. In der Aufgabe liegen zwey Bedingungen: daß der rechte Winkel des Triangels der gegebenen Linie entgegengesetzt, und daß der Triangel dem gegebenen Quadrat gleich seyn müsse. Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn man AB in C halbirt, und aus C mit CA einen halben Cirkel beschreibt; da denn von jedem Punkte der Peripherie gerade Linien nach A und B gezogen werden können, wodurch lauter rechtwinklichte Triangel formirt werden, deren Hypothenuse AB ist. Zur zweyten Bedingung gehört nur noch die Höhe des Triangels; weil diese Höhe, und die halbe Grundlinie AC, den Inhalt des Triangels bestimmt, welcher dem Innhalte des Quadrats Q gleich seyn soll. Solche Höhe aber wird gefunden, wenn man III. §. 125. zur halben Grundlinie und zur Seite des Quadrats die dritte Proportionallinie sucht. Sie sey gefunden, und der senkrechten Linie CD gleich. Ziehet man nun durch D der AB die EF parallel: so kann man von jedem Punkte der EF gerade Linien nach A und B ziehen, wodurch lauter Triangel formirt werden, deren jeder dem Quadrate Q gleich ist. Verbindet man nun beyde Bedingungen: so siehet man leicht ein, daß die Punkte E und F beyden zugleich ein Genüge leisten, und daher die Aufgabe auflösen.

Wäre das gegebene Quadrat größer: so würde CD auch größer, und einmal dem Halbmesser CG gleich werden, so daß nach und nach die Punkte E, F, immer näher zusammenrücken, und alsdenn in G zusammen treffen müßten. Wäre das Quadrat so groß, daß die dazu gehörige Höhe größer als CG würde: so wäre gar keine Auflösung möglich.

2. Algebraische Auflösung. Nennt man das gegebene Quadrat a^2, die gegebene Linie, welche die Hypothenuse des rechtwinklichten Triangels werden soll, b, die beyden

beyden Catheten x und y: so ist der Inhalt des Triangels $\frac{xy}{2} = a^2$, folglich $2xy = 4a^2$; und nach dem Pythagorischen Lehrsatze $x^2 + y^2 = b^2$. Addirt man beyde Gleichungen: so erhält man $x^2 + 2xy + y^2 = b^2 + 4a^2$, folglich $x + y = \surd(b^2 + 4a^2)$. Subtrahirt man beyde Gleichungen von einander: so erhält man $x^2 - 2xy + y^2 = b^2 - 4a^2$, folglich $x - y = \surd(b^2 - 4a^2)$. Demnach ist IV. §. 49. $x = \frac{\surd(b^2 + 4a^2) + \surd(b^2 - 4a^2)}{2}$, und $y = \frac{\surd(b^2 + 4a^2) - \surd(b^2 - 4a^2)}{2}$.

3. Geometrische Construction. Sucht man III. §. 65. Zus. $\surd(b^2 + 4a^2)$, und III. §. 98* $\surd(b^2 - 4a^2)$: so findet man daraus x und y, und kann hierauf den verlangten Triangel leicht beschreiben.

Anmerkung. Hätte man in obigen beyden Gleichungen $\frac{xy}{2} = a^2$, und $x^2 + y^2 = b^2$, den Werth von x^2 gesucht; nämlich $b^2 - y^2$, und $\frac{4a^2}{y^2}$: so wäre nach gehöriger Reduction $y^4 + b^2y^2 + 4a^2 = 0$. Setzt man V. §. 19. Zus. $y^2 = z$: so ist $z^2 + b^2z + 4a^2 = 0$, eine quadratische Gleichung, welche sich nach §. 6. construiren läßt; wovon das nähere §. 13. folgen wird.

§. 9.

Aufgabe. Die drey Seiten eines Triangels ABC, sind gegeben, auf eine derselben BC, fällt von dem entgegengesetzten Winkel ein Perpendikel AD; man soll die Abschnitte dieser Seite, BD, DC, finden. Fig. 194.

Es sey $CB = a$, $BA = b$, $AC = c$, $BD = x$, $DC = a - x$: so ist $AD^q = AC^q - DC^q = AB^q - BD^q$, das ist, $c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$, folglich $2ax = b^2 - c^2 + a^2$, folglich $x = \frac{b^2 - c^2}{2a} + \frac{1}{2}a = \frac{(b + c)(b - c)}{2a} + \frac{1}{2}a$.

Demnach besteht der Abschnitt BD, aus der halben Seite BE, und aus ED, der vierten Proportionallinie zu der doppelten Seite BC, zur Summe, und zur Differenz der beyden übrigen Seiten BA, AC; wornach die geometrische Construction zu machen ist.

Zusatz. 1. Die Construction ergiebt sich hier, so wie in vielen Fällen, auch so gleich aus der Aufgabe selbst. Denn macht man aus den gegebenen Seiten den Triangel, und fället von der Spitze A einen Perpendikel: so hat man die Abschnitte BD, DC, unmittelbar. In dergleichen Fällen haben die algebraischen Formeln wenigstens den Nutzen, daß sie die Methode zeigen, das gesuchte zu berechnen.

2. Die Auflösung ist oben so genommen, daß $b > c$. Denn ist $b < c$: so wird $b - c$, folglich der ganze Ausdruck für ED, negativ, und muß alsdenn nicht zu BE addirt, sondern davon subtrahirt werden.

§. 10.

Aufgabe. In einem rechtwinklichten Triangel BAC, ist die Summe der drey Seiten, nebst der Höhe AD, gegeben; man soll die Hypothenuse BC, finden. Fig. 195.

Es sey $AB + BC + CA = a$, $AD = b$, $BC = x$, und daher $CA + AB = a - x$. Auch setze man

CA —

$CA - AB = y$. Folglich ist IV. §. 49. $AC = \frac{a - x + y}{2}$, und $AB = \frac{a - x - y}{2}$.

Nach dem Pythagorischen Lehrsatze ist $BC^q = AB^q + AC^q$, das ist, $x^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + 2ay - 2xy + y^2}{4} + \frac{a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2}{4} = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{2}$, folglich $x^2 = a^2 - 2ax + y^2$.

Nach III. §. 122. Zus. 1. ist $BC : BA = AC : AD$, das ist, $x : \frac{a - x + y}{2} = \frac{a - x - y}{2} : b$, folglich $bx = \frac{(a - x)^2 - y^2}{4}$, folglich $4bx = a^2 - 2ax + x^2 - y^2$, folglich $y^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4bx$.

Setzt man diesen Werth anstatt y^2 in die oben gefundne Gleichung für x^2, so erhält man $x^2 = a^2 - 2ax + a^2 - 2ax + x^2 - 4bx$, folglich $o = 2a^2 - 4ax - 4bx$, oder $o = a^2 - 2ax - 2bx$, folglich $(2a + 2b)x = a^2$, folglich $x = \frac{a^2}{2a + 2b} = \frac{\frac{1}{2}a . a}{a + b}$.

Demnach ist $a + b : a = \frac{1}{2}a : x$, oder die Hypothenuse geometrisch bestimmt, und kann der rechtwinklichte Triangel, dessen Höhe auch gegeben ist, leicht in einem halben Cirkel beschrieben werden.

Anmerkung. Bey dieser Auflösung ist eine unbekannte Größe y freywillig hinzugefügt, und hierauf wieder eliminirt worden.

§. 11.

Aufgabe. In einem Triangel ABC, ist die Grundlinie BC, nebst den Winkeln an der Grund-

linie, B und C, gegeben; man soll die Höhe AD, finden. Fig. 194.

Es sey BC = a, AD = x. Wegen der gegebenen Winkel, B und C, sind §. 3. die Verhältnisse AD:DB, und AD : DC, gegeben. Nun sey AD : DB = m : n, und AD : DC = p : q. Folglich ist $DB = \frac{nx}{m}$, und $DC = \frac{qx}{p}$; folglich $a = \frac{nx}{m} + \frac{qx}{p}$; folglich $amp = npx + mqx = (np + mq)\,x$, folglich $x = \frac{amp}{np + mq}$.

Zusatz. 1. Machte man p : q = m : r, so würde $x = \frac{amm}{nm + mr} = \frac{am}{n + r} = a.\ \frac{m}{n + r}$, folglich $n + r : m = a : x$.

2. Ist m oder AD, der Halbmesser: so sind n und r, oder BD und DC, die Cotangenten der Winkel B und C.

3. Wäre C ein stumpfer Winkel: so erhält man $x = a.\ \frac{m}{n - r}$, weil alsdenn $\frac{nx}{m} - \frac{qx}{p} = a$ ist.

§. 12.

Aufgabe. In einem Triangel ABC, sind zwey Seiten AB, BC, nebst dem eingeschlossenen Winkel B, gegeben; man soll einen der übrigen Winkel C, finden. Fig. 194.

Wegen des gegebenen Winkels B, sind §. 3. die Verhältnisse AB : BD, und AB : AD, gegeben, und wegen des gesuchten Winkels C, will man die Verhältniß CD : DA. Nun sey AB = a, BC = b, AB : BD = m : n, AB : AD = p : q; so ist $AD = \frac{qa}{p}$, und $BD = \frac{na}{m}$,

daher

daher $CD = b - \frac{na}{m} = \frac{mb - na}{m}$. Demnach ist $CD : DA = \frac{mb - na}{m} : \frac{qa}{p}$, und §. 3. durch diese Verhältniß der Winkel C gefunden.

Zusatz. 1. Macht man $p : q = m : r$, so ist $CD : DA = mb - na : ra$.

2. Ist m oder AB der Halbmesser: so ist n oder BD der Cosinus, und r oder AD der Sinus des Winkels B. Die gefundne Verhältniß CD : DA, aber ist die Verhältniß des Halbmessers zur Tangente des Winkels C.

III. Quadratische Gleichungen.

§. 13.

Aufgabe. Jede quadratische Gleichung von der Form $x^2 \mp px \mp q = 0$, geometrisch zu construiren. Fig. 196. 197. 198. 199.

Man lege willkürlich eine gerade Linie als Einheit zum Grunde, und bestimme darnach p und q in geraden Linien. Nun sey die Gleichung

1. $x^2 - px + q = 0$. Man ziehe Fig. 196. zwey gerade Linien AB, AC, senkrecht auf einander; mache $AC = 1$, $AB = p$, $AD = q$; halbire AB und CD in E und F; vollende das Parallelogramm AG; und ziehe aus G durch D und C einen Cirkel: so sind AH, AK, die gesuchten Wurzeln, und zwar beyde positiv.

Denn da III. §. 146. 147. $AC : AK = AH : AD$; so ist $AH . AK = AC . AD = 1 . q = q$. Da auch AB in E halbirt, und III. §. 69. $EH = EK$: so ist $AH = KB$, folglich $BH = AK$.

Setzt man nun $AK = + x$, so wird $AH = KB = p - x$, und $AH . AK = px - x^2 = q$, folglich

$x^2 - px + q = 0$. Setzt man $AH = +x$, so wird $AK = P - x$, und man erhält eben die Gleichung.

2. $x^2 + px + q = 0$. Man mache Fig. 197. alles wie vorher, nur daß man der AB eine entgegensetzte Lage gebe: so ist alles wie vorher, nur daß die Wurzeln AH, AK, beyde negativ sind.

Setzt man nun $AK = BH = -x$: so wird $AH = p - (-x) = p + x$, folglich $AH. AK = -px - x^2 = q$, folglich $x^2 + px + q = 0$. Setzt man $AH = -x$, so wird $AK = P + x$, und man erhält eben dieselbe Gleichung.

3. $x^2 - px - q = 0$. Man mache Fig. 198. alles wie zuerst, nur daß man AD in die entgegengesetzte Lage bringe: so ist alles wie zuerst, nur daß die größere Wurzel AK positiv, die kleinere AH negativ ist.

Setzt man nun $AK = +x$, so wird $AH = x - p$, folglich $AH. AK = x^2 - px = q$, folglich $x^2 - px - q = 0$. Setzt man $AH = BK = -x$, so wird $AK = p - x$, und man erhält eben die Gleichung.

4. $x^2 + px - q = 0$. Man mache Fig. 199. alles wie zuerst, nur daß man AB sowohl als AD in die entgegengesetzte Lage bringe: so ist alles wie zuerst, nur daß die kleinere Wurzel AK positiv, die größere AH negativ ist.

Setzt man nun $AK = +x$, so ist $AH = p + x$, folglich $AH. AK = px + x^2 = q$, folglich $x^2 + px - q = 0$. Setzt man $AH = -x$, so ist $AK = -x - p$, und man erhält eben die Gleichung.

Zusatz. 1. Die beyden ersten Figuren, so wie die beyden letzten sind nur der Lage nach verschieden. Daher alles nur auf Fig. 196. 198. (oder Fig. 128. 127.) ankommt, von denen die erste oder die letzte gebraucht

wird,

wird, je nach dem in der Gleichung q positiv, oder negativ ist. Doch setzen alle vier Figuren die Sache noch mehr ins Licht.

2. Ist in den beyden ersten Figuren FA dem Halbmesser des Cirkels gleich: so treffen K und H in einem Punkte zusammen, und beyde Wurzeln werden einander gleich. Ist aber FA größer als der Halbmesser: so reicht der Cirkel nicht an AB, und die Wurzeln sind unmöglich; welches in den beyden letztern Figuren nie geschehen kann, weil C und D an verschiedenen Seiten der AB liegen, und daher ein Cirkel aus G durch C und D die AB nothwendig zweymal schneiden muß.

§. 14.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie AB, soll so geschnitten werden, daß der eine Abschnitt AK, die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Linie AB, und dem andern Abschnitte KB, werde. Fig. 200.

Es sey $AB = a$, $AK = x$, und daher $KB = a - x$. Demnach ist $a : x = x : a - x$, folglich $x^2 = a^2 - ax$, folglich $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Die Construction geschiehet nach dem vierten Falle §. 13. da denn $p = a$, und wenn man die Einheit a setzt, auch $q = a$ ist. Man mache daher $AC = AD = a = AB$, und $AE = \frac{1}{2}a$, und beschreibe aus E einen Cirkel durch C und D, so sind AK und AH die Wurzeln, welche der Aufgabe ein Genüge leisten; so daß so wohl $AK^2 = AK. KB$, als auch $AH^2 = AB. HB$.

Eben diese Wurzeln lassen sich auch berechnen, wenn man die gefundne Gleichung in die einzelnen $x =$

$- \frac{1}{2}a$

$-\frac{1}{2}a \mp \surd(a^2 + \frac{1}{4}a^2)$ zerlegt, das ist $x = -\frac{1}{2}a \mp \surd\frac{5}{4}a^2 = \frac{-a \mp a\surd 5}{2} = a.\frac{-1 \mp \surd 5}{2}$.

§. 15.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie AB, soll so geschnitten werden, daß das Quadrat des einen Abschnitts AH, zum Quadrat des andern Abschnitts HB, die gegebene Verhältniß m : n, habe. Fig. 201.

Es sey AB = a, AH = x, und daher HB = a — x: so ist $x^2 : (a^2 - 2ax + x^2) = m : n$, folglich $nx^2 = ma^2 - 2max + mx^2$, folglich $(m - n)x^2 + ma^2 - 2max = 0$, folglich $x^2 - \frac{2ma}{m-n}x + \frac{ma^2}{n-m} = 0$.

Die Construction geschiehet nach dem ersten Falle §. 13, da denn $p = \frac{2ma}{m-n}$, folglich $AE = \frac{ma}{m-n}$. Nun sey auch $AC = 1 = \frac{ma}{m-n}$, so ist q = AD = a. Vollendet man hierauf die Figur: so sind AH und AK die gesuchten Wurzeln, so daß $m : n = AH^q : HB^q = AK^q : BK^q$.

Eben diese Wurzeln lassen sich auch berechnen, wenn man aus der gefundnen Gleichung schließt $x = \frac{ma}{m-n} \mp \surd\left(-\frac{ma^2}{m-n} + \frac{m^2a^2}{(m-n)^2}\right)$. Letztrer Ausdruck, auf einerley Benennung gebracht, giebt $\surd\frac{-m^2a^2 + mna^2 + m^2a^2}{(m-n)^2} = \surd\frac{mna^2}{(m-n)^2} = \frac{a\surd mn}{m-n}$.

Folglich ist $x = \frac{ma \mp a\surd mn}{m-n} = a.\frac{m \mp \surd mn}{m-n}$.

Es

Es sey z. E. a = 10, m = 9, n = 4: so ist x entweder = $10.\frac{9 - \sqrt{36}}{5} = \frac{90 - 60}{5} = 6$; oder = $10.\frac{9 + \sqrt{36}}{5} = \frac{90 + 60}{5} = 30$.

Für x = 6 ist HB = 4, und 36 : 16 = 9 : 4.
Für x = 30 ist BK = 20, und 900 : 400 = 9 : 4.

Zwey=

Zweytes Kapitel.

Von den unbestimmten Aufgaben.

I. Grundlehren.

§. 16.

Eine unbestimmte Aufgabe führt auf eine Gleichung, worinn zwey oder mehrere unbekannte Größen vorkommen, so daß eine davon durch die Gleichung bestimmt wird, wenn die übrigen willkührlich angenommen werden, auch der Werth von jener verschiedentlich ausfällt, je nachdem man diesen einen verschiedenen Werth beylegt. Daher nennt man die unbekannten Größen einer solchen Gleichung, die mancherley Werthe zulassen, veränderliche Größen; die bekannten aber, deren Werth, wenn er einmal angenommen ist, sich nicht verändert, beständige Größen. Die Construction einer solchen Gleichung giebt unzählige Puncte, welche alle der Aufgabe ein Genüge leisten. Diese Puncte liegen gemeiniglich in einer geraden oder krummen Linie, welche sich in einer Ebene verzeichnen läßt, und der geometrische Ort aller gesuchten Puncte genannt wird.

So war z. E. §. 8. die Peripherie des halben Cirkels der geometrische Ort für die Spitze aller rechtwinklichten Triangel, deren Hypothenuse die gegebene Linie AB ist; und die gerade Linie EF der geometrische Ort für die Spitze aller Triangel, deren Grundlinie AB, und deren Höhe CD; deren jeder daher dem gegebenen Quadrate Q gleich ist.

Zusatz.

Zusatz. 1. Der geometrische Ort kann auch eine Fläche seyn, so wie auch eine Linie, welche sich nicht in einer Ebene, sondern, z. E. auf der Oberfläche einer Kugel, beschreiben läßt. Gemeiniglich aber, und dies ist der Fall, auf den wir uns einschränken, ist der Ort eine Linie in einer Ebene; und zwar entweder eine gerade Linie, oder eine Cirkellinie, oder eine jede andre krumme Linie.

2. In diesem Theile der Analysis, den man füglich die **unbestimmte geometrische Analytik** nennen könnte, der aber in der eingeführten Sprache die **Geometrie der krummen Linien**, geometria curvarum, auch wohl die **höhere Geometrie**, geometria sublimior heißt, muß man zum Verständniß solcher Benennungen die **Elementar-Aufgaben**, welche zu ihrer Construction nur gerade oder Cirkel-Linien erfodern, von den **höhern Aufgaben** unterscheiden, deren Construction auf andre krumme Linien außer dem Cirkel führet. Letztre nur machen die Geometrie der krummen Linien aus, welche mit dem Namen der höhern Geometrie belegt wird; in deren Gegensatz **Elementar-Geometrie** heißt, die sich auf gerade Linien und den Cirkel einschränkt.

Anmerkung. Schon **Plato** hat bemerkt, wie nur Unkundige sich wundern könnten, daß auch Irrationalgrößen vorhanden wären, und wie es vielmehr ein Wunder seyn würde, wenn es nicht sehr viele Irrationalgrössen gäbe. Eben diese Bemerkung läßt sich auch auf die unbestimmten Aufgaben anwenden, da es denn leicht begreiflich wird, daß deren Menge unzählbar seyn müsse. Denn die Größen haben sehr viele Eigenschaften mit einander gemein, und nur einige ihnen eigenthümliche. Enthält nun eine Aufgabe nur solche gemeinschaftliche Eigenschaften: so ist es offenbar, daß solche nicht bestimmt

seyn,

sey, sondern daß alle Größen, denen solche Eigenschaften gemein sind, zur Auflösung der Aufgabe dienen werden. Daher lassen sich auch leicht bestimmte Aufgaben in unbestimmte verwandeln, wenn man einige Bedingungen, die zu ihrer völligen Bestimmung dienen, daraus entfernt.

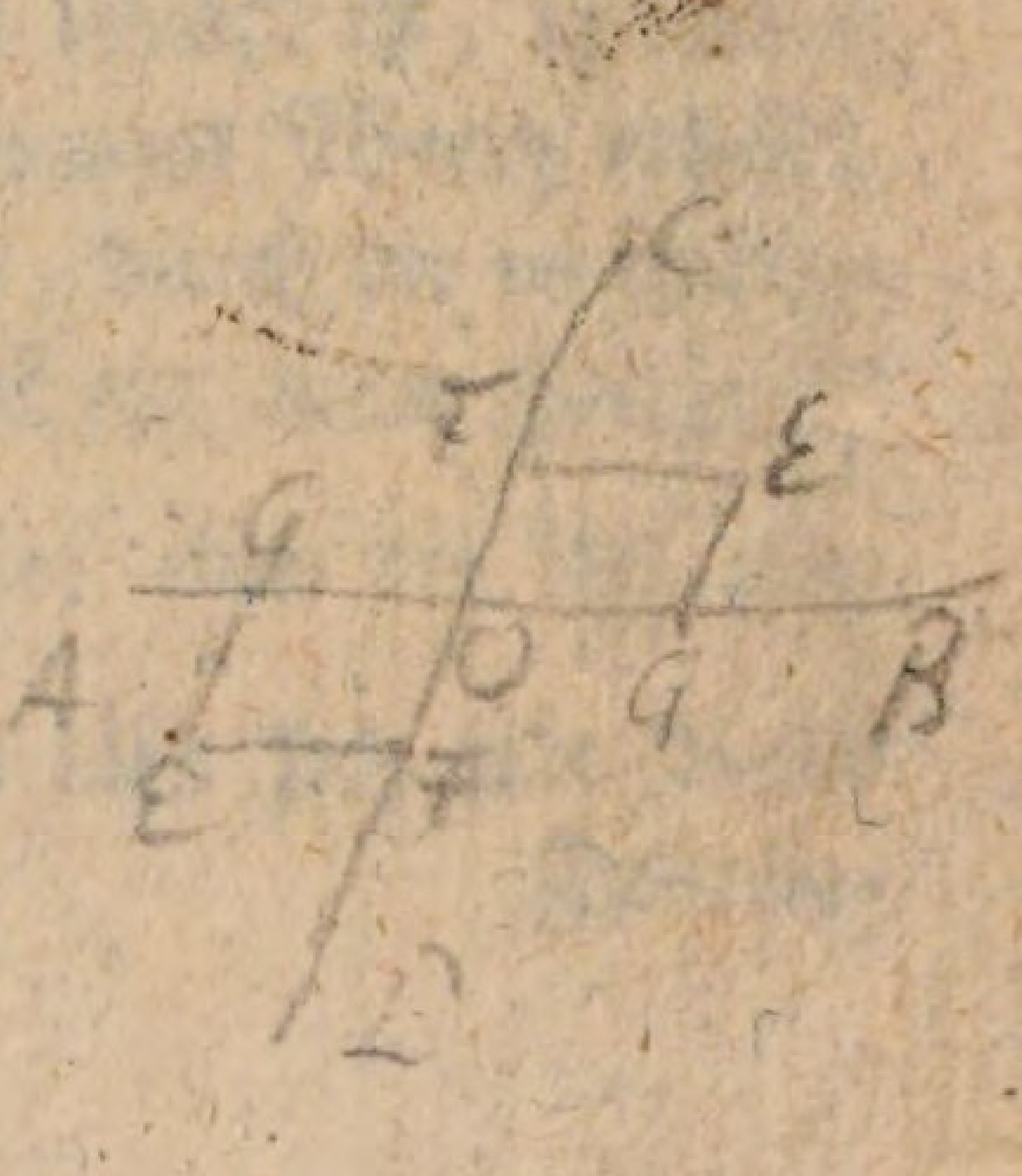
§. 17.

Jeder Ausdruck, worinn eine veränderliche Größe auf irgend eine Art vorkommt, dessen Werth daher mit der veränderlichen Größe zugleich sich ändert, heißt eine Function solcher veränderlichen Größe; dergleichen man aus jeder unbestimmten Gleichung herleiten, oder in eine unbestimmte Gleichung verwandeln kann.

So ist x^m, oder $ax + bx^2$, oder $(yx^n + ax^m)^p$ oder log. x, oder sin x, u. s. w. eine Function der veränderlichen Größe x; indem jeder dieser Ausdrücke einen andern und andern Werth bekömmt, je nachdem der Werth von x anders und anders angenommen wird.

Auf eben die Art giebt auch die unbestimmte Gleichung $a^2 - xy = 0$, eine Function von x oder y. Denn aus der Gleichung folgt $a^2 = xy$. Setzt man nun $y = \frac{a^2}{x}$, so ist dieser Ausdruck eine Function von x, welche, da §. 16. a^2 eine beständige Größe ist, so wie x bestimmt wird, auch einen bestimmten Werth erhält, der, da er jedesmal anders ausfällt, durch die veränderliche Größe y angezeigt wird. Setzt man hingegen $\frac{a^2}{y} = x$, so ist dieser Ausdruck auf eben die Art eine Function von y. Und umgekehrt läßt sich jede dieser

Functio-



Functionen in die unbestimmte Gleichung $a^2 = xy$, oder $a^2 - xy = 0$, verwandeln.

Anmerkung. Eine solche Gleichung enthält selten mehr als drey; am häufigsten nur zwey veränderliche Größen. Auf den letztern Fall schränken wir uns ein; da denn die Gleichung oder Function durch eine Linie in einer Ebene construirt werden kann.

§. 18.

Die Ordnung einer unbestimmten Gleichung, oder einer Function, wird nach der höchsten Dimension, womit die veränderlichen Größen, oder auch nur eine derselben, vorkommen, bestimmt.

Bey Bestimmung der Ordnung kann man die eine veränderliche Größe für die übrigen setzen, um eine bestimmte Gleichung zu erhalten. Je nachdem nun diese einfach, oder quadratisch u. s. w. ist, je nachdem ist auch die unbestimmte Gleichung oder die Function von der ersten, zweyten, oder einer höhern Ordnung. Auch werden hiernach die Functionen einförmig, zweyförmig, vielförmig genannt.

§. 19.

Aufgabe. Für unbestimmte Gleichungen, oder für Functionen, eine leichte Constructions-Methode anzugeben. Fig. 202.

In einer Ebene ziehe man zwey gerade Linien AB, CD, welche sich in O unter einem beliebigen Winkel schneiden. Ist nun von irgend einer veränderlichen Größe x eine Function $y = \frac{a^2}{x}$: so trage man auf AB von O an die verschiedenen Werthe von x, die positiven nach B,

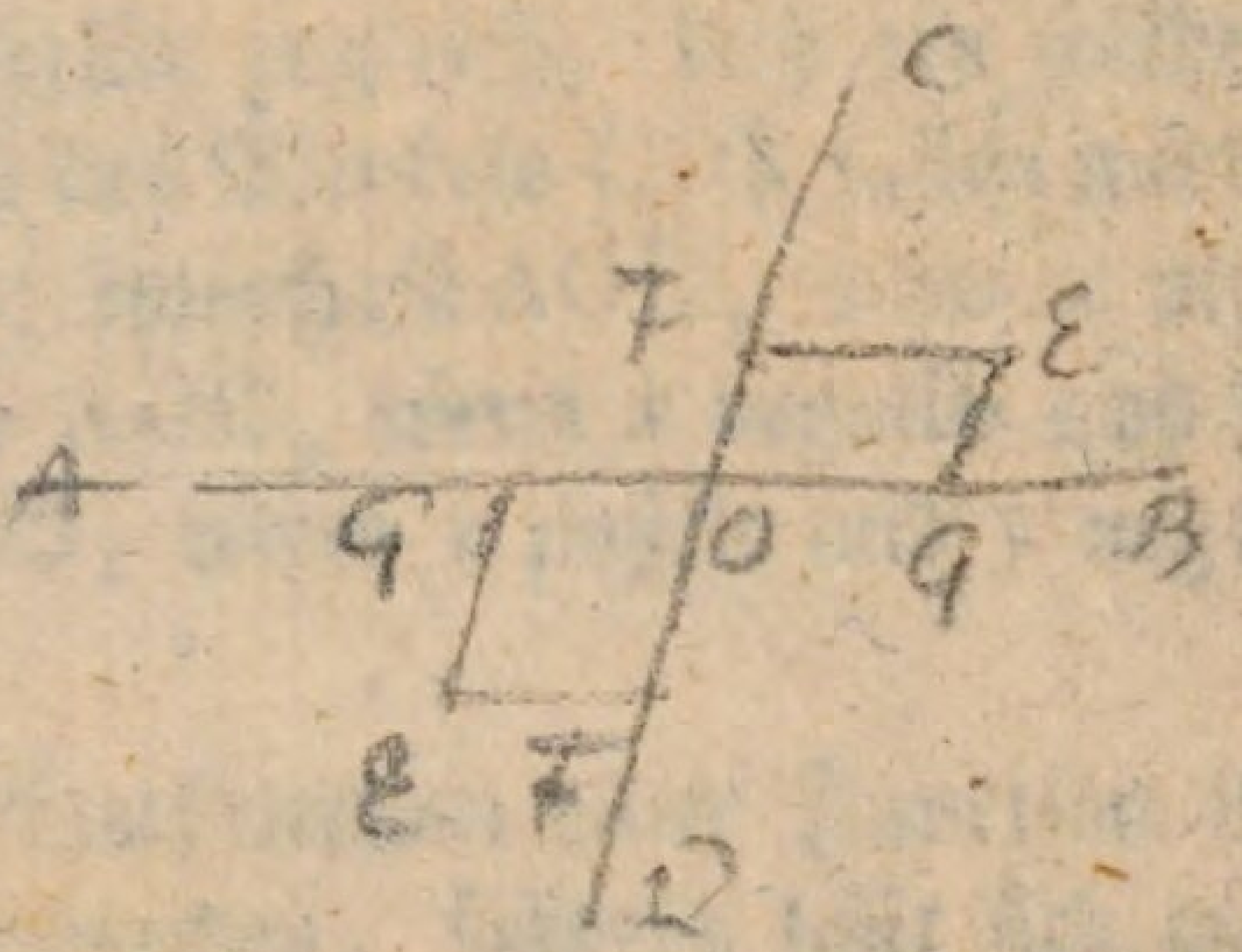
die negativen nach A zu, und eben so die jedesmal hiedurch bestimmten Werthe von y auf CD von O an, die positiven nach C, die negativen nach D zu, z. E. $y = \mp OF$, für $x = \mp OG$. Vollendet man hierauf das Parallelogramm GF: so bestimmt solches den einen Punkt E der gesuchten Linie. Auf eben die Art lassen sich auch mehrere Punkte, und durch solche der geometrische Ort der Function bestimmen.

Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, daß ein solcher Punkt, wie E, innerhalb des Winkels COB fallen wird, wenn x und y positiv sind; innerhalb AOD, wenn x und y negativ sind; innerhalb AOC, wenn x negativ und y positiv ist; innerhalb BOD, wenn x positiv und y negativ ist.

Anmerkung. Die Construction einer Function ist nicht an eine Methode gebunden, sondern läßt sich auf unzählige Arten bewerkstelligen, besonders, wenn man dabey annimmt, daß die veränderlichen Größen auch Winkel, oder Theile von der Peripherie eines Cirkels, und dergleichen mehr, bedeuten. Indessen ist die angeführte Methode die einfachste, von welcher man nicht leicht abgehet.

§. 20.

Von den beyden geraden Linien, AB, CD, welche sich in einer Ebene unter einem gewissen Winkel O schneiden, und auf welche der geometrische Ort einer Function in derselben Ebene sich beziehet, heiße die eine AB die Grundlinie; die andre CD, die Seite. Jede der Grundlinie oder der Seite parallele Linie heiße eine Ordinate, und jede zwey zusammengehörige Ordinaten, wie GE, FE, Coordinaten, auch der Winkel, den die Coordinaten einschließen, und der allemal dem Winkel O gleich ist, der Coordinaten-


C
A
O
B
D

ten-Winkel. Endlich jeder Theil der Grundlinie, welcher von der Seite CD, und der ihr applicirten Ordinate wie GE, abgeschnitten wird, heiße eine Abscisse, und der Durchschnittspunkt der Seite, O, der Anfang der Abscissen. In dieser Rücksicht nennt man auch die Grundlinie AB die Abscissenlinie. und die der Seite CD parallel gezognen Linien, wie GE, die Ordinaten, da denn jede Abscisse wie OG ihre zugehörige Ordinate GE hat, und jene durch x, diese durch y, bezeichnet zu werden pflegt. Beyde sind alsdenn Coordinaten, und der Winkel, unter welchen sie einander schneiden, der Coordinaten-Winkel. Fig. 202.

§. 21.

Ist der geometrische Ort einer Function eine krumme Linie: so heißt die Abscissenlinie die Axe, Diameter, je nachdem der Ordinaten-Winkel ein rechter ist, oder nicht. Der Scheitel der krummen Linie ist der Punkt, worinn die krumme Linie die Axe schneidet. Die Schenkel, rami, sind die Theile der krummen Linie zu beyden Seiten der Axe vom Scheitel an. Eine gerade Linie, welche mit einer krummen Linie einen Punkt gemein hat, so daß beyde Bogen der krummen Linie von solchem Punkte an auf einer Seite der geraden Linie liegen, heißt eine Tangente der krummen Linie; und der Theil der Abscissenlinie, welcher von der verlängerten Tangente und von der dem Berührungspunkte zugehörigen Ordinate abgeschnitten wird, die Subtangente. Eine gerade Linie, welche auf der Tangente im Berührungspunkte senkrecht ist, und die Abscissenlinie schneidet, heißt eine Normallinie, und derjenige Theil der Abscissenlinie, welcher von der Normallinie und obgedachter Ordinate abgeschnitten wird, die Subnormallinie. Fig. 203.

Für die Cirkellinie FAE sey AC die Abscissenlinie, A der Anfang der Abscissen, AP eine Abscisse x, PM eine Ordinate y, also AP, PM, Coordinaten, und der rechte Winkel APM der Coordinaten-Winkel: so ist AC die Axe der Curve; A der Scheitel; AE, AF, die Schenkel; MD eine Tangente; MC die Normallinie; PD die Subtangente; PC die Subnormallinie.

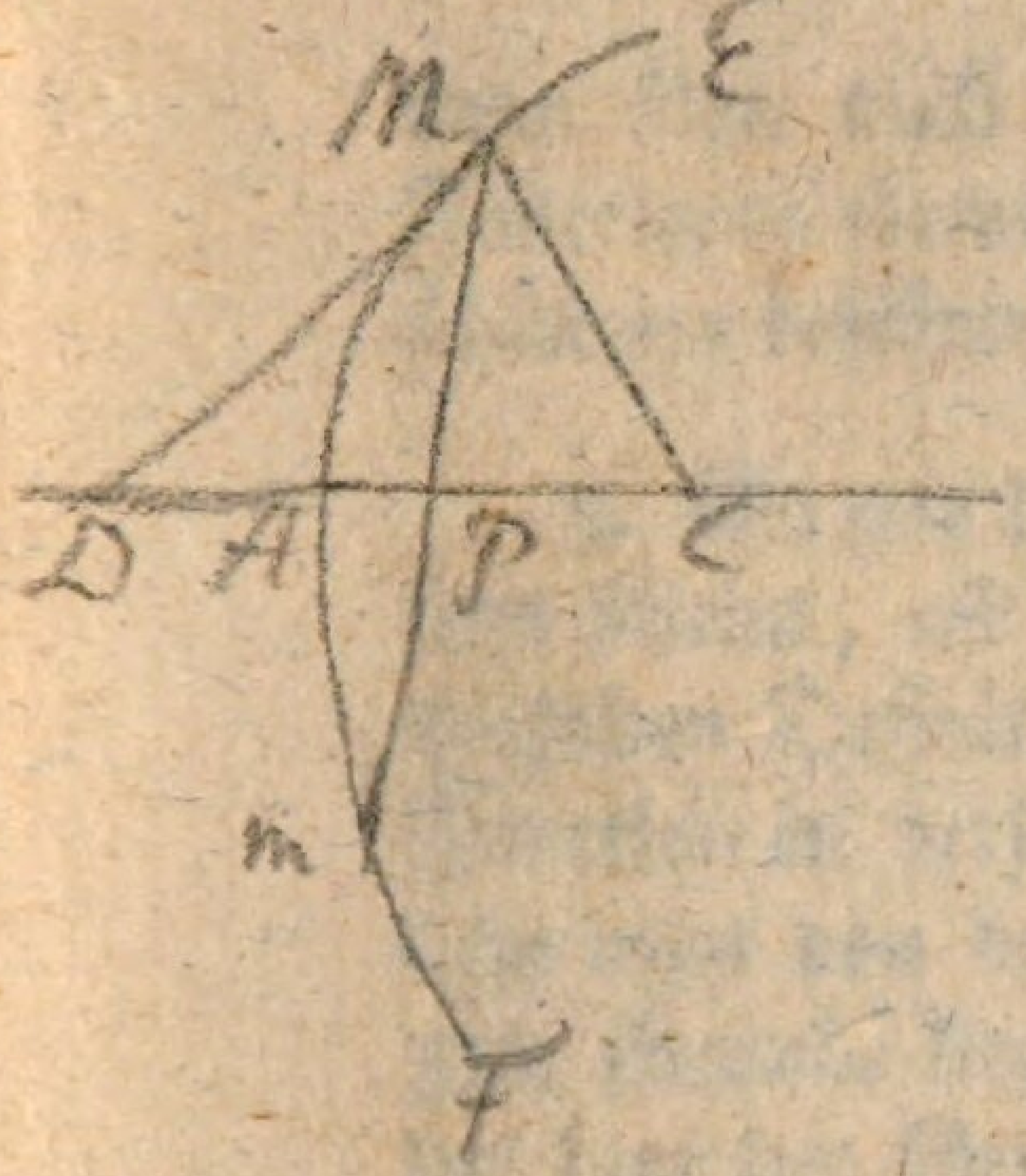
§. 22.

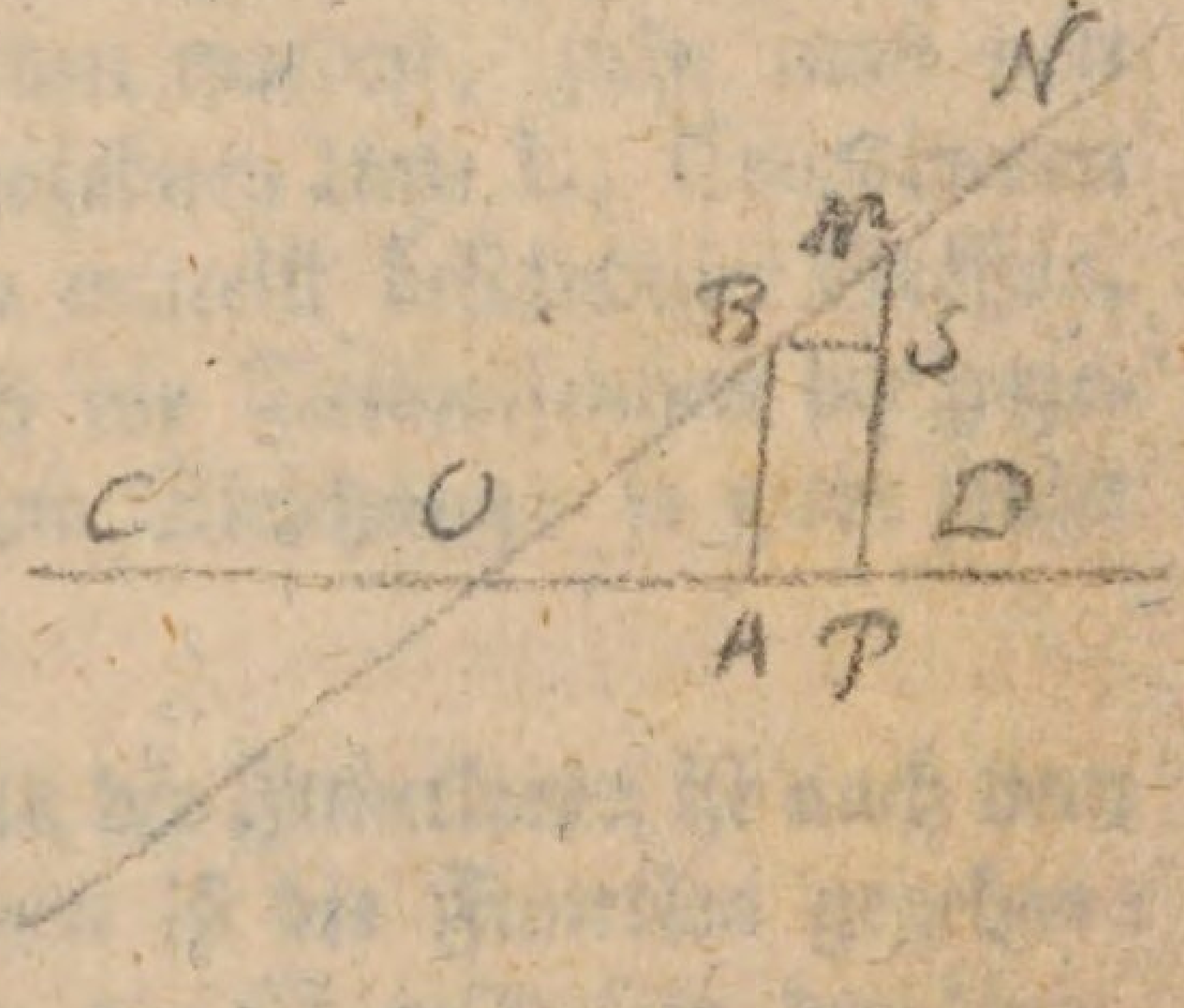
Aufgabe. Für eine Linie von bekannten oder gegebenen Eigenschaften eine Function zu formiren. Fig. 202.

Nachdem die Lage der Grundlinie AB, und der Seite CD, nebst dem Anfange der Abscissen O, in einerley Ebene mit der bereits construirten Linie, gegeben, oder willkührlich angenommen worden, ziehe man von irgend einem Punkte der gegebnen Linie E, Coordinaten EF, EG, und bringe solche mittelst beständiger Größen, auf deren Beschaffenheit sich die Beschaffenheit der gegebenen Linie gründet, in eine Gleichung: so giebt solche die verlangte Function.

Zusatz. 1. Der Nutzen der Functionen ist nach dem bisherigen gedoppelt. Denn ist die Function gegeben: so braucht man solche, um die Eigenschaften der Linie, die durch solche Function ausgedrückt wird, daraus herzuleiten. Ist aber die Linie von bekannten Eigenschaften gegeben: so bringt man solche in eine Gleichung, und formirt hiedurch eine Function, welche die Natur der Linie in sich faßt. Demnach können die Functionen als sehr brauchbare Definitionen der Linien angesehen werden.

2. So wie man von einer und derselben Sache, in verschiedener Rücksicht auf diese oder jene Eigenschaft und Beziehung, verschiedene Definitionen geben kann: so kann


M
E
D
A
P
C
m
F


N
M
B
S
C
O
D
A
P

kann man auch für eine und dieselbe Linie verschiedne Functionen formiren, je nachdem sich die Linie nach verschiednen beständigen Größen bestimmen läßt.

3. So wie das, was eine verschiedne Definition zu seyn scheint, oft nur ein verschiedner Ausdruck einer und derselben Definition ist: so läßt sich auch eine und dieselbe Function in verschiednen Ausdrücken darstellen, je nachdem man von den drey Stücken, die bey jeder Function zum Grunde liegen, nämlich dem Anfang der Abscissen, der Lage der Grundlinie, und der Lage der Seite, eins oder zwey, oder alle ändert.

II. Ableitung der Functionen aus den Linien.

§. 23.

Aufgabe. Für die gerade Linie eine Function zu finden. Fig. 204.

In der Ebene, worinn die gegebene gerade Linie ON ist, ziehe man nach Gefallen die Abscissenlinie CD, welche die gegebene Linie in O schneidet, und nehme den willkührlichen Anfang der Abscissen A. Von einem beliebigen Punkte der gegebenen Linie M ziehe man MP unter beliebigem Winkel, und AB mit MP parallel: so ist OA und die Winkel O und A, folglich auch AB gegeben. Nun sey $AO = m$, $AB = n$, $AP = x$, $PM = y$, und daher $OP = m + x$, und III. §. 116. $OA : AB = OP : PM$. Folglich ist $m : n = m + x : y$, folglich $my = nm + nx$, folglich $y = n + \frac{m}{n} . x$, die verlangte Function.

§. 24.

Aufgabe. Für den Cirkel eine Function zu finden. Fig. 205.

1. Auf dem Durchmesser AB = 2r, sey A der Anfang der Abscissen, und in einem beliebigen Punkte P, die PM senkrecht, so daß AP = x, PM = y, und PB = 2r — x. Nun ist III. §. 122. AP : PM = PM : PB. Folglich ist x : y = y : 2r — x, folglich $y^2 = 2rx - x^2$, die verlangte Function.

2. Im Mittelpunkte C sey der Anfang der Abscissen, und pm senkrecht: so ist III. §. 65. $Cm^q = Cp^q + pm^q$, das ist, $r^2 = x^2 + y^2$, folglich $y^2 = r^2 - x^2$, die verlangte Function.

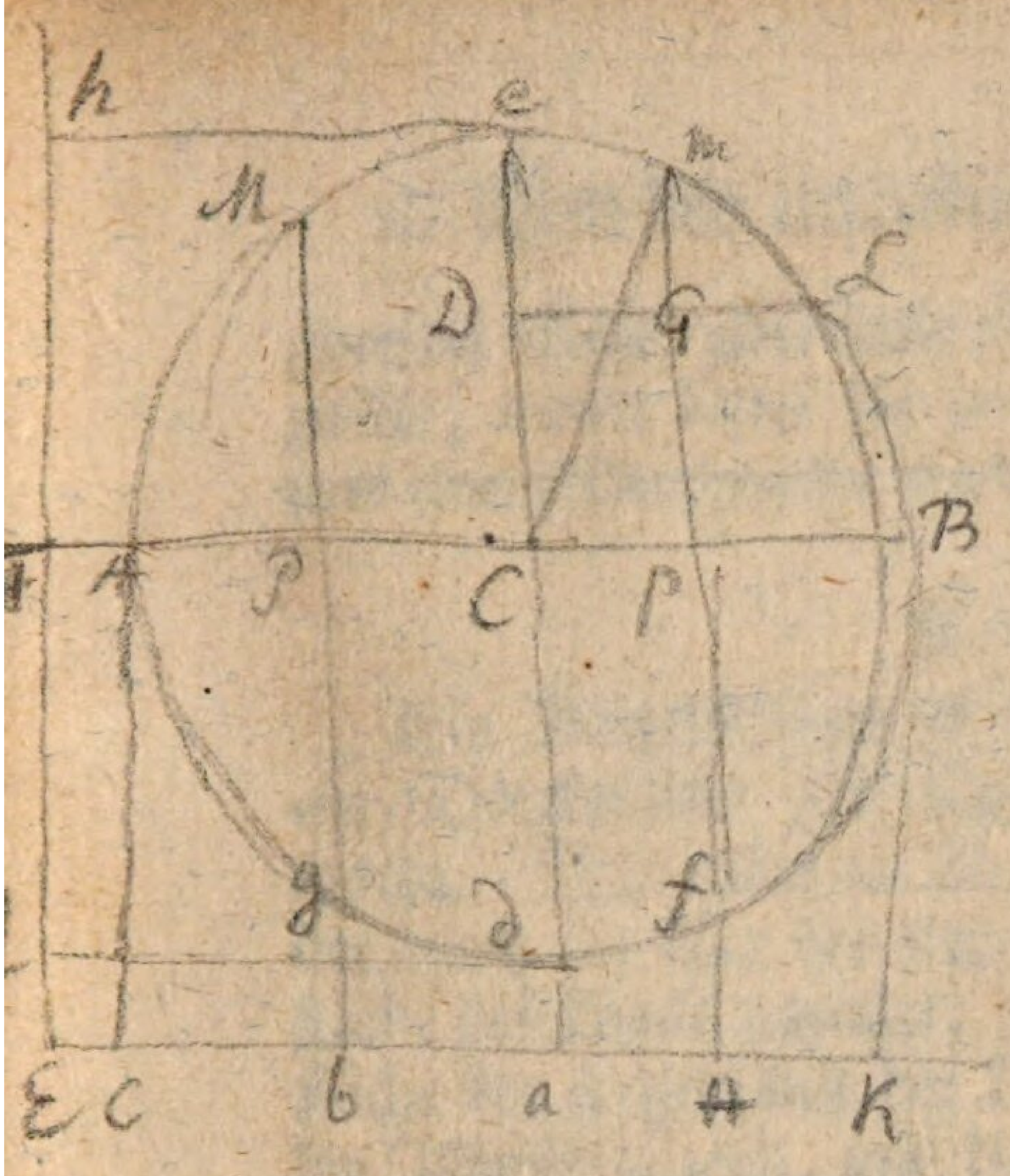
Zusatz. 1. Wolte man die letztre Function in eine verwandeln, wobey der Anfang der Abscissen A wäre, folglich die Abscisse Ap: so setze man in obiger Function $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, x — r anstatt x, und man erhält $x^2 - 2rx + y^2 = 0$, folglich $y^2 = 2rx - x^2$, die erste Function.

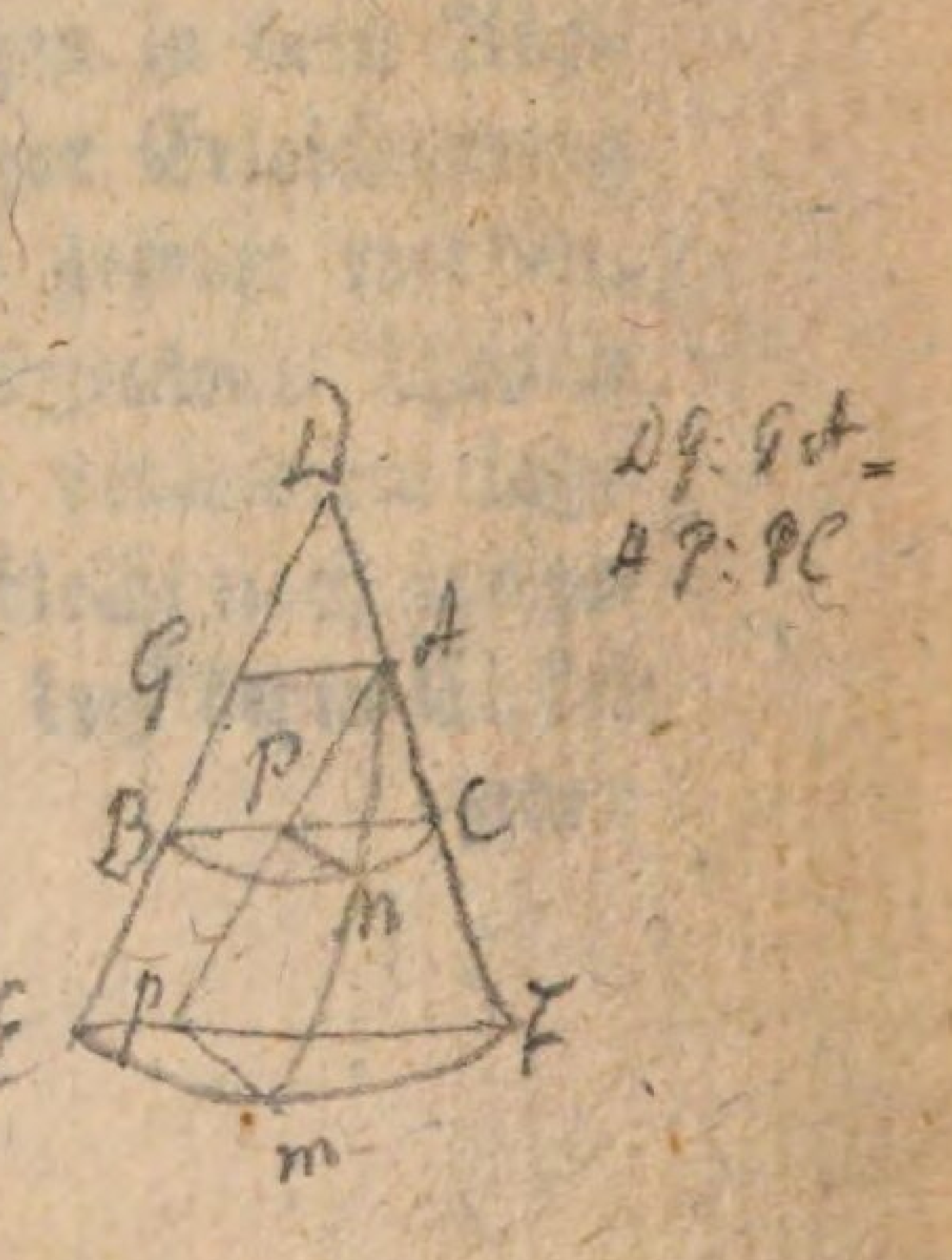
2. Solte in eben der Function D der Anfang der Abscissen seyn, so daß CD = n; so setze man y + n anstatt y, und man erhält $y^2 + 2ny + n^2 + x^2 - r^2 = 0$, wobey DL die Abscissenlinie, folglich DG die Abscisse, und GM die Ordinate ist.

3. Solte E der Anfang der Abscissen seyn, so daß CF = a, und FE = b: so setze man x — a statt x, und y — b statt y, und man erhält $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$, wobey EK die Abscissenlinie, folglich EH die Abscisse, Hm die Ordinate ist.

Anmerkung. Diese Veränderungen in dem Ausdrucke einer und derselben Function sind zur Erleichterung an dem speciellen Beyspiele des Cirkels gezeigt worden, um §. 22. Zus. 3. zu erläutern. Die allgemeine Theorie solcher Veränderungen, dahin auch die veränderte Lage der Seite und der Grundlinie gehört, bleibt noch ausgesetzt. Doch ist hier noch anzumerken, daß beym Cirkel

zwar


h
e
m
M
L
D
G
B
A
P
C
P
g
d
f
E
C
b
a
A
K


D
G
A
P
B
C
m
E
p
F
m
DG:GA=
AP:PC

zwar die Seite, aber nicht die Grundlinie eine andre Lage zuläßt; indem letztre bey jeder angenommenen Lage doch stets einem Durchmesser des Cirkels parallel bleibt.

§. 25.

Ein Kegelschnitt ist die Figur, welche irgend ein Durchschnitt des Kegels auf seiner Oberfläche macht. Nun gehet ein solcher Durchschnitt 1. entweder durch die Axe des Kegels; 2. oder ist der Grundfläche des Kegels parallel; 3. oder ist gegen die Grundfläche des Kegels mit der Seite desselben unter einerley Winkel geneigt, und daher solcher Seite parallel; oder seine Neigung ist ein von jenem verschiedener Winkel, da er denn 4. entweder beyde entgegengesetzte Seiten des Kegels schneidet, 5. oder nur die eine davon, und die andre blos verlängert. Im ersten Falle ist die Figur ein Triangel, im zweyten ein Cirkel, im dritten eine Parabel, im vierten eine Ellipse, im fünften eine Hyperbel.

Anmerkung. Die beyden ersten Kegelschnitte sind in der reinen Geometrie behandelt, auch für den zweyten §. 24. bereits eine Function gefunden. Für die drey übrigen wird ein gerader Kegel zum Grunde gelegt; indem die Schritte für den schiefen Kegel von eben der Natur sind, und sich aus jenen leicht herleiten lassen.

§. 26.

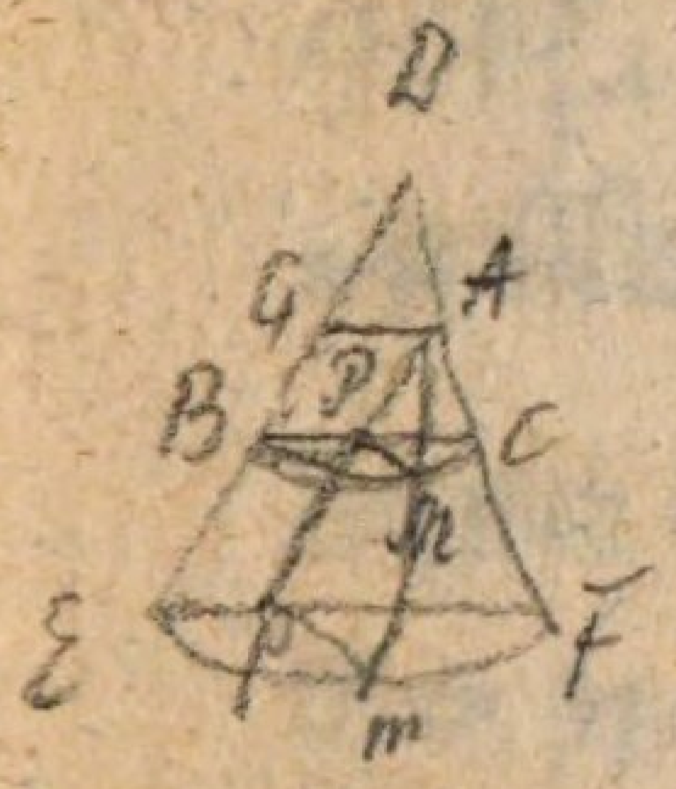
Aufgabe. Für die Parabel eine Function zu finden. Fig. 206.

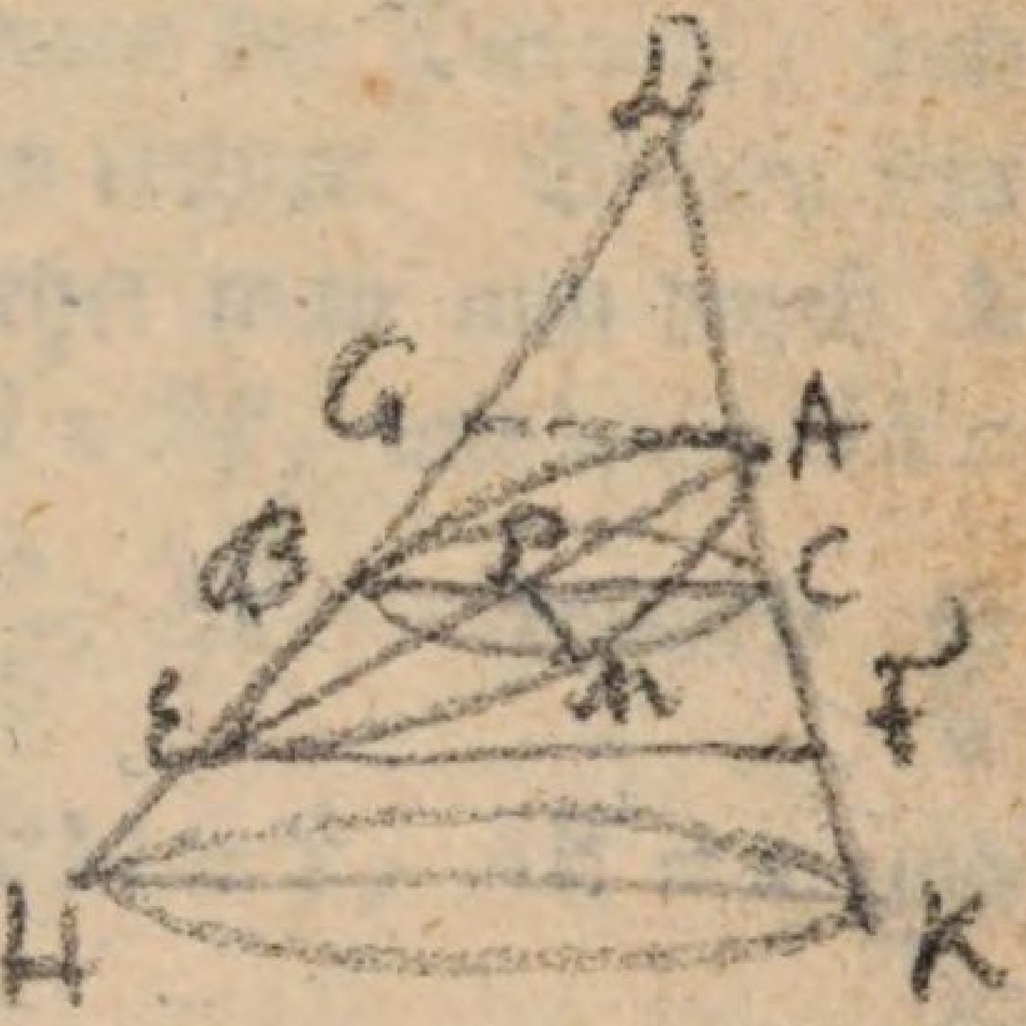
Es sey ΔEDF der Durchschnitt eines geraden Kegels durch die Axe. Durch einen beliebigen Punkt A in der Seite DF lege man einen Schnitt Apm, senkrecht auf der Ebene EDF, der Seite DE parallel: so entsteht

§. 25. eine **Parabel**, deren Axe Ap und Scheitel A ist, da denn Ap der Seite DE parallel läuft. In der Seite DF nehme man willkührlich einen andern Punkt C zwischen A und F, und lege dadurch einen andern Schnitt BMC der Grundfläche parallel, und daher auch senkrecht auf der Ebene EDF: so ist solcher ein Cirkel, dessen Durchmesser BC, der EF parallel ist. Demnach ist PM, worinn sich beyde Schnitte schneiden, so wohl auf AP, als auf BC senkrecht. Wegen des erstern ist AP eine Absciſſe, PM eine Ordinate der Parabel, und der Coordinaten-Winkel APM ein rechter. Wegen des letztern ist $PM^q = BP.\ PC$. Ziehet man nun durch A die AG der BC parallel: so ist AG = BP, und DG : GA = AP : PC, daher $PC = \frac{GA}{DG}.\ AP$ Folglich ist $PM^q = \frac{AG.\ AG}{DG}.\ AP$ Nun ist PM = y, AP = x und $\frac{AG.\ AG.}{DG} = p$, eine beständige Größe, weil, wo auch A angenommen ist, die Proportion DG : AG = AG : p, unverändert bleibt. Folglich ist $y^2 = px$ die Function für die Parabel.

Zusatz. In dieser Function nennt man die beständige Größe p den **Parameter**, (Nebenmesser, weil solcher durch Linien AG, DG, bestimmt wird, die nicht in der Ebene der Parabel, sondern neben ihr in dem Axentriangel des Kegels EDF liegen). Dieser **Parameter** ist die vierte Proportionallinie zu der Axe der Parabel Ap, und den Abschnitten, Ep, pF, welche die Axe auf dem Durchmesser der Grundfläche des Kegels macht. Denn wegen Aehnlichkeit der Triangel DGA, ApF, ist DG : GA = Ap : pF. Nun war DG : AG = AG : p. Folglich ist Ap : pF = AG : p. Nun ist AG = Ep. Folglich ist Ap : pF = Ep : p.

§. 27.


D
G
A
B
C
E
F
m


D
G
A
B
C
F
H
K

§. 27.

Aufgabe. Für die Ellipse eine Function zu finden. Fig. 207.

Es sey HDK abermals der Axentriangel des geraden Kegels. Durch beyde Seiten gehe in A und E ein Schnitt AME senkrecht auf der Ebene HDK; so entsteht §. 25. eine Ellipse, deren große Axe AE, und Scheitel A ist. Durch C gehe abermals ein Cirkel BMC, dessen Durchmesser BC der HK parallel ist: so ist, wie §. 26. AP die Abscisse, PM die Ordinate der Ellipse, beyde senkrecht auf einander, auch $PM^q = BP. PC$. Nun ist, wenn man AG und EF der HK parallel ziehet, im ΔAEF, $AE : AP = EF : PC$, daher $PC = \frac{AP. EF}{AE}$,

und im ΔEAG, $EA : EP = AG : BP$, daher $BP = \frac{EP. AG}{EA}$.

Folglich ist $PM^q = \frac{EP. AG}{EA} . \frac{AP. EF}{AE} = \frac{EP. AP}{AE} . \frac{AG. EF}{AE}$.

Nun setze man $PM = y$, $AP = x$, $AE = a$, daher $EP = a - x$, und $\frac{AG. EF}{AE} = p$, eine beständige Größe, weil, wo auch A angenommen ist, die Proportion $AE : EF = AG : p$ unverändert bleibt. Folglich ist $y^2 = \frac{(a - x)\, x}{a} . p = px - \frac{px^2}{a}$ die Function für die Ellipse.

Zusatz. Auch in dieser Function heißt die beständige Größe p der Parameter, welcher die vierte Proportionallinie zu der großen Axe AE und den beyden Linien AG, EF, ist, die durch die Endpunkte der großen Axe dem Durchmesser der Grundfläche parallel gezogen werden.

§. 28.

Aufgabe. Für die Hyperbel eine Function zu finden. Fig. 208.

Es sey wiederum EDF der Axentriangel des geraden Kegels, dessen über D hinaus verlängerte Schenkel den Axentriangel KDH eines dem erstern entgegengesetzten geraden Kegels bilden. Durch einen willkührlichen Punkt A in der einen Seite DF, und H in der verlängerten andern Seite EDH gehe eine gerade Linie pr. Durch diese Linie gehe ein Schnitt auf der Ebene KEFH senkrecht: so entsteht §. 25. eine Hyperbel, oder zwey entgegengesetzte Hyperbeln, deren Zwergaxe AH, und deren Scheitel A und H sind. Durch C sey abermals ein Cirkel BMC gelegt, dessen Durchmesser BC der EF parallel: so ist $PM^q = BP. PC$. Endlich sey auch durch A die AG der EF parallel: so ist im $\triangle ApF$, $Ap : AP = pF : PC$, daher $PC = \frac{AP. pF}{Ap}$, und im $\triangle HEp$, $Hp : HP = Ep : BP$, daher $BP = \frac{HP. Ep}{Hp}$. Folglich ist $PM^q = \frac{HP. Ep}{Hp}. \frac{AP. pF}{Ap} = \frac{AP. HP.}{Ap}. \frac{Ep. pF}{Hp}$. Nun setze man $AP = x$, $PM = y$, $HA = a$, $Ap = HA = a$, daher $Hp = 2a$, und $\frac{Ep. pF}{2a} = p$, eine beständige Größe, weil, wo auch A und H angenommen ist, die Proportion $2a : Ep = pF : p$ unverändert bleibt. Folglich ist $y^2 = \frac{x. (a + x)}{a}. p = px + \frac{px^2}{a}$ die Function für die Hyperbel.

Zusatz. 1. In dieser Function ist A der Anfang der Abscissen, und diese für den untern Theil der Hyperbel positiv. Soll nun A auch für die negativen Abscissen, die

die dem obern Theile der Hyperbel zugehörig sind, bleiben: so ist jede dieser Abscissen $-(Aa+x)=-(a+x)$. Setzt man diesen Werth anstatt x in die obige Gleichung: so erhält man die Gleichung für den obern Theil der Hyperbel $y^2 = p(-a-x) + p\left(\frac{a^2 + 2ax + x^2}{a}\right)$ $= -pa - px + pa + 2px + \frac{px^2}{a} = px + \frac{px^2}{a}$, die nämliche Gleichung wieder, welche also allgemein für beyde entgegengesetzte Theile der Hyperbel gilt.

2. Auch bey der Hyperbel heißt die beständige Größe p der **Parameter**, und ist die vierte Proportionallinie zu der doppelten Zwergaxe und den Abschnitten Ep, pF, welche die doppelte Zwergaxe auf dem Durchmesser der Grundfläche des Kegels macht.

Anmerkung. Die ersten Elemente der Geometrie der Curven schränken sich auf die Kegelschnitte, als die leichtesten und allgemein brauchbaren Arten der krummen Linien, ein.

III. Ableitung der Linien aus den Functionen.

§. 29.

Aufgabe. Die der Function $y = \frac{bx}{a} + c$, zugehörige Linie zu finden. Fig. 204.

Da x und y, als veränderliche Größen, alle mögliche Werthe haben können: so setze man zuerst ihren Werth Null an. Für $x = 0$ ist $y = c$, und für $y = 0$ ist $\frac{bx}{a} = -c$ folglich $x = \frac{-ca}{b}$.

Man

Man ziehe also eine gerade Linie CD, und setze in A den Anfang der Abscissen. In A errichte man die Ordinate AB = c, unter dem vorgeschriebnen Coordinaten-Winkel, wozu hier ein rechter Winkel angenommen ist. Von A trage man linker Hand $\frac{ac}{b}$ = AO, das ist b : a = AB : AO, so ist O der Punkt für y = o, weil unter dieser Voraussetzung $x = -\frac{ac}{b}$ ist. Nun folgt auch aus der Gleichung (y — c) a = bx, folglich ist y — c : x = b : a. Nun war b : a = AB : AO. Folglich ist y — c : x = AB : AO. Nun nehme man willkührlich x = AP, ziehe PM der AB und BS der OA parallel, daher BS = AP = x, und mache AO : AB = BS : SM, so ist SM = y — c, und, wenn man OB, BM ziehet, △OAB ∾ △BSM, folglich OBA = BMS, und daher OBM eine gerade Linie, in welcher also die drey bereits gefundnen Punkte O, B, M, liegen. Nun wird gleiches von allen übrigen Punkten eben so bewiesen. Folglich ist der geometrische Ort für die gegebene Function eine gerade Linie.

Zusatz. Setzt man c = n, und $m = \frac{ac}{b}$, folglich $\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$, und bringt diese Werthe in die gegebene Function: so erhält man $y = \frac{n}{m} x + n$ wie man §. 23. gefunden hat.

§. 30.

Aufgabe. Die der Function $y^2 = ay - x^2$ zugehörige Linie zu finden. Fig. 209.

Die

Die gegebene Gleichung auf Null gebracht giebt $y^2 - ay + x^2 = 0$, folglich V. §. 19. $y = \frac{1}{2}a \mp \surd(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$. Setzt man nun

1. $x = 0$; so wird $y = \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}a$, das ist entweder $= a$, oder $= 0$. Man ziehe daher die Abscissenlinie AB, setze den Anfang der Abscissen in C, errichte CD senkrecht, und nehme an, daß $CD = a$: so sind C und D Punkte in der gesuchten Linie.

2. $x = \mp \frac{1}{2}a$, so wird $y = \frac{1}{2}a \mp 0$. Man mache also CB sowohl als $CA = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}CD$, errichte BF und AE senkrecht, und mache jede $= \frac{1}{2}a$: so sind auch F und E Punkte in der gesuchten Linie.

3. $x > \mp \frac{1}{2}a$: so wird $(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$ negativ folglich y unmöglich, das heißt, über F und E hinaus liegt nichts von der gesuchten Linie.

4. x zwischen 0 und $\mp \frac{1}{2}a$: so ist $\surd(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$ etwas mögliches, und kleiner als $\frac{1}{2}a$. Demnach giebt es für jedes x zwischen C und B, und zwischen C und A, zwey Ordinaten, $y = \frac{1}{2}a +$ und $y = \frac{1}{2}a -$, wovon also die erste z. E. $PG > \frac{1}{2}a$ aber $< a$, und die zweyte $PM < \frac{1}{2}a$ ist.

Nähme man nun an, daß die gesuchte Linie ein Cirkel wäre, der aus K mit dem Halbmesser KC gezogen ist: so würde solcher mit allen aus der Function abgeleiteten Eigenschaften übereinstimmen; wovon man sich nun auch völlig also überzeugen kann. Es sey PM eine gefundne Ordinate, folglich $CP = x$, $PM = y$. Nun sey MR der CP parallel, und daher $CR = y$, $RM = x$, auch vermöge der gegebenen Gleichung $x^2 = ay - y^2 = (a - y)y$. Folglich ist $RM^q = CR . RD$, eine offenbare Eigenschaft des Cirkels, dessen Durchmesser CD ist.

§. 31.

§. 31.

Bey den Kegelschnitten heiße derjenige Punkt der Axe, dessen zugehörige Ordinate dem halben Parameter gleich ist, der Brennpunkt, focus.

§. 32.

Eine Linie, für welche bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = px$ ist, heiße eine Parabel, und p ihr Parameter.

§. 33.

Die Ordinate der Parabel ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Parameter und der Absciße; auch wird die Parabel von der Axe halbirt.

Denn aus der Gleichung folgt $p : y = y : x$, und $y = \mp \sqrt{px}$, das ist, jedem x kommt ein zweyfaches gleich großes y zu beyden Seiten der Axe zu.

§. 34.

Aufgabe. Eine Parabel zu verzeichnen. Fig. 210.

In der Abscissenlinie EG sey A der Anfang der Abscissen, CD in A senkrecht, AE = p, und eine beliebige Abscisse x = AP; auch schneide der Cirkel für den Durchmesser EP die CD in R und r: so ist EA : AR = AR : AP, das ist, $p : y = y : x$. Vollendet man nun die Parallelogramme AM, Am: so sind M und m Punkte in der Parabel. Sucht man nun dergleichen für jedes andre beliebige x, so nahe bey einander als man will; so kann man durch solche die krumme Linie aus freyer Hand ziehen.

§. 35.

In der Parabel verhalten sich die Abscissen wie die Quadrate der Ordinaten, und daher die Ordinaten wie die Quadratwurzeln der Abscissen. Fig. 210.

Man

Man nehme beliebig zwey Ordinaten PM, QV, für die Abscissen AP, AQ: so ist §. 32. $PM^q = AP.p$, und $QV^q = AQ.p$, folglich $PM^q : QV^q = AP.p : AQ.p = AP : AQ$, das ist, $y^2 : Y^2 = x : X$, folglich auch $y : Y = \sqrt{x} : \sqrt{X}$.

§. 36.

Der Scheitel der Parabel ist im Anfange der Abscissen A, und ihre beyden Schenkel AV, Av, divergiren von der Axe bis ins Unendliche. Fig. 210.

Denn ist $x = 0$, so ist $y = \mp \sqrt{px} = 0$, folglich A ein Punkt in der krummen Linie, von welcher daher die Axe daselbst geschnitten wird, so daß also A der Scheitel der Parabel ist. So lange nun x positiv bleibt, so wird $y = \mp \sqrt{px}$ oder die Ordinate immer größer, je größer man x annimmt, und man hat demnach zwey Schenkel AV, Av, die sich von der Axe immer mehr ohne Ende entfernen, so wie x ohne Ende wächst. So bald x negativ, das ist, auf der andern Seite von A, gesetzt wird, so wird $\sqrt{-px}$ unmöglich, daher die Parabel nur die beyden Schenkel AV, Av hat, das ist, nur auf der Seite nach G zu liegt.

§. 37.

In der Parabel beträgt der Abstand des Brennpunkts vom Scheitel, AF, den vierten Theil des Parameters; daher auch der Abstand eines jeden Punkts in der Parabel vom Brennpunkte, MF, der zu solchem Punkte gehörigen Abscisse AP nebst dem vierten Theile des Parameters gleich ist. Oder $AF = \frac{1}{4}p$, und $MF = x + \frac{1}{4}p$. Fig. 210.

Da §. 31. für den Brennpunct $y = \frac{1}{2}p$ so ist nach der Gleichung §. 32. $\frac{1}{4}p^2 = AF.p$, folglich $\frac{1}{4}p = AF$. Nun ist $MF^q = FP^q + PM^q = (AP - AF)^q + PM^q$.

Folg-

Folglich ist $MF^q = (x - \frac{1}{4}p)^2 + px = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 + px = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$, folglich $FM = x + \frac{1}{4}p$.

§. 38.

Aufgabe. Eine Parabel noch auf leichtere Art zu verzeichnen. Fig. 210.

Von A trage man Af = AF, errichte auf der Axe Perpendikel, wie Mm, Vv, so viele und so nahe als man will, und schneide solche aus F mit den Weiten Pf, Qf u. s. w. so erhält man §. 37. die Punkte in der Parabel M, m, V, v, u. s. w. durch welche man die krumme Linie aus freyer Hand ziehet.

§. 39.

Eine Linie, für welche bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ ist, heiße eine **Ellipse**, p ihr Parameter, und a ihre große Axe.

Zusatz. Setzt man p bey der Parabel und Ellipse einerley: so ist bey der letzten y^2 um $\frac{px^2}{a}$ kleiner, als bey der ersten. Daher der Name Parabel, Gleichheit, und **Ellipse**, Mangel.

§. 40.

Der eine Scheitel der Ellipse ist im Anfange der Abscissen A, der andre in einem Punkte der Abscissenlinie B, welcher vom Anfange um die große Axe entfernt ist. Auch wird die Ellipse von der Axe halbirt. Fig. 211.

Im Scheitel, wo die Axe von der Curve geschnitten wird, ist y = 0. Setzt man daher $0 = px - \frac{px^2}{a}$: so

ist

ist $\frac{px^2}{a} = px$, oder $\frac{x^2}{a} = x$, und dies findet statt, sowohl wenn $x = 0$, als auch wenn $x = a$ ist, folglich in A und B. Auch ist nach der Gleichung $y = \mp \sqrt{(px - \frac{px^2}{a})}$.

§. 41.

In der Ellipse verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Rectangel aus den Abschnitten der großen Axe. Fig. 211.

Man nenne zwey Abscissen x, v, und die dazu gehörigen Ordinaten y, z: so ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, und $z^2 = pv - \frac{pv^2}{a}$, folglich $y^2 : z^2 = p\left(x - \frac{x^2}{a}\right) : p\left(v - \frac{v^2}{a}\right) = ax - x^2 : av - v^2 = x(a-x) : v(a-v)$.

Anmerkung. Im Cirkel ist das Quadrat jeder Ordinate dem Rectangel aus den Abschnitten der Axe gleich.

§. 42.

In der Ellipse heißt die mittlere Proportionallinie zwischen der großen Axe und dem Parameter die kleine Axe c, und ihr Durchschnitt mit der großen Axe der Mittelpunkt. Fig. 211.

Setzt man $x = \frac{1}{2}a$, so ist $CD = \sqrt{(\frac{1}{2}ap - \frac{1}{4}ap)} = \sqrt{\frac{1}{4}ap} = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$, folglich $Dd = c = \sqrt{ap}$, oder $a : c = c : p$.

Zusatz. Demnach ist der Parameter die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Axe, oder $p = \frac{c^2}{a}$.

§. 43.

Aufgabe. Die kleine Axe in die Function der Ellipse zu bringen.

Da §. 42. Zus. $p = \frac{c^2}{a}$: so setze man diesen Werth anstatt p in die Gleichung §. 39. und man erhält $y^2 = \frac{c^2}{a} x - \frac{c^2}{a^2} x^2$.

Zusatz. Ist $a = c$, so ist auch $p = a$, und $y^2 = ax - x^2$, die Gleichung für den Cirkel, dessen Durchmesser a ist. Demnach kann man den Cirkel als eine Ellipse ansehen, deren große Axe, kleine Axe, und Parameter von gleicher Größe sind.

§. 44.

Aufgabe. Eine Function für die Ellipse aus dem Mittelpunkte zu formiren. Fig. 211.

Nennt man die Abscisse aus dem Mittelpunkte u: so ist nach der Gleichung §. 43. $x = \frac{1}{2}a - u$, und daher $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - au + u^2$. Demnach ist $\frac{c^2}{a} x = \frac{1}{2}c^2 - \frac{c^2u}{a}$, und $\frac{c^2}{a^2} x^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u}{a} + \frac{c^2u^2}{a^2}$. Folglich ist $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$, die Gleichung aus dem Mittelpunkte.

§. 45.

Die Ordinaten der Ellipse zu beyden Seiten des Mittelpunkts sind kleiner als die Hälfte der kleinen Axe, nehmen desto mehr ab, je weiter sie sich vom Mittelpunkte entfernen, werden in den Scheiteln Null, und über die Scheitel hinaus unmöglich; daher die Ellipse eine in sich selbst zurückkehrende Curve ist.

Denn wenn $u = 0$, so ist §. 44. $y = \sqrt{\frac{1}{4}c^2} = \frac{1}{2}c$; in allen übrigen Fällen wird von $\frac{1}{4}c^2$ etwas subtrahirt, und zwar desto mehr je größer u ist, daher $y < \frac{1}{2}c$ wird.

wird. Setzt man $u = \frac{1}{2}a$, so wird $y = 0$, und für $u > \frac{1}{2}a$, unmöglich.

§. 46.

Aufgabe. Den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte der Ellipse zu finden. Solcher Abstand heiße e.

In der Gleichung §. 44. ist, wenn man $u = e$, oder $u^2 = e^2$ setzt, §. 31. $y = \frac{1}{2}p$, oder $y^2 = \frac{1}{4}p^2$, oder, weil §. 42. Zus. $p = \frac{c^2}{a}$ ist, $y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung: so erhält man $\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2}.\ e^2$, folglich, wenn man mit $\frac{c^2}{a^2}$ dividirt, $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{4}a^2 - e^2$, folglich $e^2 = \frac{1}{4}(a^2 - c^2)$.

Zusatz. 1. Die Ellipse hat also zwey Brennpunkte in der Axe, zu beyden Seiten des Mittelpunkts in gleicher Entfernung von demselben. Denn es ist $e = \mp \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 - c^2)} = \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$.

2. Der Abstand der Brennpunkte F, f, von einem Scheitel A, oder AF, Af, ist AC — CF, und AC + Cf, folglich $\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$.

3. Da $FD^q = CF^q + CD^q = \frac{a^2 - c^2}{4} + \frac{c^2}{4}$: so ist der Abstand der Brennpunkte vom Endpunkte der kleinen Axe $FD = fD = \sqrt{\frac{a^2 - c^2 + c^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}a$.

4. Aus $e^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}$ folgt $\frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{4} - e^2$, folglich $c^2 = a^2 - 4e^2$.

§. 47.

Ziehet man von jedem beliebigen Punkte der Ellipse M, gerade Linien nach den Brennpunkten, MF, Mf: so ist die Summe dieser Linien, MF + Mf, der großen Axe AB, gleich. Fig. 211.

Erstlich ist $MF^q = FP^q + PM^q = (CF - CP)^q + PM^q$. Nun ist §. 46. $CF = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{4}}$ und §. 44. $CP = u$, daher $CF - CP = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{4}} - u$, daher $(CF - CP)^q = \frac{a^2 - c^2}{4} - 2u \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2} + u^2$; aber §. 44. $PM^q = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} u^2$. Folglich ist $MF^q = \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4} - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{a^2} u^2$. Nun ist $u^2 - \frac{c^2}{a^2} u^2 = \frac{a^2 u^2 - c^2 u^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} . u^2$. Folglich ist $MF^q = \frac{a^2}{4} - u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{a^2} . u^2$, folglich $MF = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$.

Zweytens ist auf eben die Art $Mf^q = fP^q + PM^q = (Cf + CP)^q + PM^q$, und man findet die vorige Formel, nur daß + statt − stehet, so daß also $Mf = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a}$.

Demnach ist $MF + Mf = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$.

Zusatz. Alle Triangel, wie FMf, FDf, u. s. w. haben demnach einerley Umfang; aber unter allen diesen hat △FDf den größten Inhalt, weil er die größte Höhe CD hat.

§. 48.

Aufgabe. Eine Ellipse zu verzeichnen. Fig. 211.

Es sey AB die große Axe, F, f, die Brennpunkte; oder, wenn beyde Axen gegeben sind, folglich daraus $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$, gefunden, und hiedurch die Brennpunkte F, f, bestimmt sind: so beschreibe man aus F mit $z = FM$ einen Cirkel, desgleichen aus f mit $a - z = fM$. Demnach ist §. 47. der Durchschnitt dieser Cirkel M, m, ein Punkt in der Ellipse, und man findet, wenn man z ändert, deren mehrere, durch welche man die Curve aus freyer Hand ziehet.

Zusatz. Befestiget man einen Faden von der Länge der großen Axe mit seinen Enden in F und f, und dehnt solchen mit einem Stifte in die Lagen wie FMf aus; so beschreibt der Stift die Ellipse.

§. 49.

Ist der Parameter bey einer Parabel und Ellipse einerley: so sind ihre Ordinaten um desto weniger von einander unterschieden, je größer die Axe der Ellipse ist, und je näher solche dem Scheitelpunkte kommen. Fig. 211.

Für die Parabel ist §. 32. $y^2 = px$; für die Ellipse §. 39. $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, folglich die Ordinaten um die Größe $\frac{px^2}{a}$ unterschieden, welche offenbar desto kleiner ist, je größer a, oder je kleiner x ist.

Zusatz. a kann bis ins unendliche wachsen, folglich $\frac{px^2}{a}$ bis ins unendliche abnehmen, wo es ganz verschwindet. Alsdenn ist für die Ellipse $y^2 = px - 0 = px$, wie

wie bey der Parabel. Daher sagt man der Bogen einer Ellipse von unendlicher Axe ist mit dem Bogen einer Parabel einerley, welches desto mehr zutrift, je näher solcher Bogen dem Scheitel ist.

Anmerkung. Nennt man die Ordinate der Parabel z, der Ellipse y: so ist $z^2 - y^2 = \frac{px^2}{a^2}$, oder $(z + y)(z - y) = \frac{px^2}{a}$, folglich $z - y = \frac{px^2}{a(z + y)}$, woraus die weitern Schlüsse leicht gezogen werden können.

§. 50.

Eine Linie, für welche bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ ist, heiße eine Hyperbel, p ihr Parameter, und a ihre Zwergaxe.

Zusatz. 1. Setzt man in der Gleichung für die Ellipse $- a$ anstatt $+ a$: so erhält man die Gleichung für die Hyperbel.

2. Da hier zu dem px der Parabel ein Zusatz $\frac{px^2}{a}$ kommt: so entstand der Name Hyperbel.

§. 51.

Der eine Scheitel der Hyperbel ist im Anfange der Abscissen A, der andre in einem entgegengesetzten Punkte der Abscissenlinie B, welcher vom Anfange um die Zwergaxe entfernt ist. Fig. 212.

Im Scheitel, wo die Axe von der krummen Linie geschnitten wird, ist $y = 0$, folglich $0 = px + \frac{px^2}{a}$, welches statt findet, so wohl wenn $x = 0$, als auch wenn

x =

$x = - a$ ist, folglich in A und B. Denn im letztern Falle ist $0 = - ap + ap$; im ersten ist es an sich klar.

§. 52.

Die Hyperbel hat vier Schenkel, wovon je zwey in entgegengesetzter Richtung von jedem Scheitel ohne Ende ausgehen. Fig. 212.

Sind die Abscissen positiv: so ist aus der Gleichung offenbar, daß $\mp y$ mit x zugleich ohne Ende wachsen müsse, daß also die Hyperbel zur rechten zwey Schenkel habe, welche von der verlängerten Axe ohne Ende divergiren. Sind die Abscissen negativ, so wird die Gleichung $y^2 = - px + \frac{px^2}{a}$, worinn der erste Theil negativ, der zweyte positiv ist. Ist nun $x < a$, so wird der positive Theil kleiner; ist $x > a$, so wird der positive Theil grösser, als der negative. Im ersten Falle ist der Rest negativ, folglich die Quadratwurzel daraus, oder y unmöglich; im zweyten Falle ist der Rest positiv, folglich die Quadratwurzel daraus, oder y möglich, und desto größer, je größer x ist. Demnach giebt es keine Ordinaten zwischen A und B; von B an aber fangen wieder Ordinaten an, die mit x zugleich ohne Ende wachsen, daß also die Hyperbel zur linken gleichfalls zwey Schenkel hat, welche von der verlängerten Axe ohne Ende divergiren.

§. 53.

Bey der Hyperbel heiße gleichfalls die mittlere Proportionallinie zwischen der Zwergaxe und dem Parameter die kleine Axe c. Denkt man sich solche wie §. 42. als eine Ordinate im Mittelpunkte C: so ist sie unmöglich.

Man setze $x = \frac{1}{2}a$: so ist $y^2 = -\frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}ap = -\frac{1}{4}ap$, folglich $y = \mp \frac{1}{2}\sqrt{-ap}$, folglich $2y = c = \sqrt{-ap}$, welche Größe als Ordinate der Hyperbel unmöglich, aber an sich selbst wohl möglich, und die mittlere Proportionallinie zwischen a und p ist.

Zusatz. Demnach ist $c^2 = ap$, folglich $p = \frac{c^2}{a}$.

§. 54.

Aufgabe. Die kleine Axe in die Function der Hyperbel zu bringen.

Setzt man den §. 53. Zus. gefundnen Werth $\frac{c^2}{a}$ anstatt p in die Gleichung: so erhält man $\frac{c^2}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2 = y^2$.

§. 55.

Aufgabe. Eine Function für die Hyperbel aus dem Mittelpunkte zu formiren. Fig. 212.

Nennt man CP, die Absciße aus dem Mittelpuncte, u: so ist in der Gleichung §. 54. $x = u - \frac{1}{2}a$, und daher $x^2 = u^2 - au + \frac{1}{4}a^2$. Demnach ist $\frac{c^2}{a}x = \frac{c^2u}{a} - \frac{1}{2}c^2$, und $\frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2u}{a} + \frac{1}{4}c^2$. Folglich ist $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$, die Gleichung aus dem Mittelpunkte.

§. 56.

Aufgabe. Den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte der Hyperbel zu finden. Solcher Abstand heiße e.

In der Gleichung §. 55. ist, wenn man $u = e$, und daher $u^2 = e^2$ setzt, §. 31. $y = \frac{1}{2}p$, und daher $y^2 = \frac{1}{4}p^2$,

oder,

oder, weil §. 53. Zus. $p = \frac{c^2}{a}$ ist, $y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung: so erhält man $\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2}{a^2} \cdot e^2 - \frac{1}{4}c^2$, folglich, mit $\frac{c^2}{a^2}$ dividirt, $\frac{1}{4}c^2 = e^2 - \frac{1}{4}a^2$, folglich $\frac{c^2 + a^2}{4} = e^2$, folglich $e = \mp \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 + a^2)}$.

§. 57.

Ziehet man von jedem beliebigen Punkte der Hyperbel M, gerade Linien nach den Brennpunkten, MF, Mf: so ist die Differenz dieser Linien, Mf — MF, der Zwergaxe AB, gleich. Fig. 212.

Auf eben die Art wie §. 47. erhält man $fM = \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} + \frac{1}{2}a$, und $FM = \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} - \frac{1}{2}a$, folglich $fM - FM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$.

§. 58.

Aufgabe. Eine Hyperbel zu verzeichnen. Fig. 212.

Hat man die Brennpunkte F, f, bestimmt: so construire man über Ff einen Triangel, deren Seiten z, und a — z, was auch für Größe z habe. Die Spitzen dieser Triangel geben §. 57. die Punkte, durch welche man die Hyperbel aus freyer Hand ziehet.

§. 59.

Errichtet man in einem Scheitel der Hyperbel A eine gerade Linie DE auf der Axe senkrecht, und macht solche zu beyden Seiten der halben kleinen Axe gleich: so heißen die geraden Linien, deren Lage durch den Mittelpunkt der Hyperbel C, und die Endpunkte ge-

dachter Linie, D, E, bestimmt ist, die Asymptoten. Fig. 212.

§. 60.

Die Asymptoten nähern sich der Hyperbel ohne Ende, ohne sie jemals zu treffen. Fig. 212.

Es sey PM = y, PR = z. Auch ist CA = $\frac{1}{2}a$, AD = $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$, CP = $\frac{1}{2}a + x$. Nun ist CA : AD = CP : PR. Folglich ist $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}\sqrt{ap} = \frac{1}{2}a + x : z$, folglich quadrirt, $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}ap = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2 : z^2$, folglich $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^3p + a^2px + apx^2}{a^2} = \frac{1}{4}ap + px + \frac{px^2}{a}$. Nun ist $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$. Folglich ist $z^2 - y^2 = \frac{1}{4}ap = \frac{c^2}{4}$, oder $(z + y)(z - y) = \frac{c^2}{4}$; folglich $z - y = \frac{c^2}{4(z+y)}$, welche Differenz immer kleiner wird, je größer $4(z + y)$ ist, (das ist, je größer die Ordinate wird, folglich je weiter sie sich vom Scheitel entfernt) aber nie verschwindet.

§. 61.

Ziehet man aus dem Scheitel der Hyperbel A eine gerade Linie AG dem Grundtheil der Asymptote, CD, parallel: so ist solche die Hälfte solches Grundtheils. Das Quadrat dieser Linie heißt die Potenz der Hyperbel. Fig. 212.

Da AG der CD parallel: so ist EA : ED = AG : CD. Nun ist EA = $\frac{1}{2}$ED. Folglich ist auch AG = $\frac{1}{2}$CD, folglich $AG^q = \frac{1}{4} CD^q$. Und dies ist die Potenz der Hyperbel.

§. 62.

Die Potenz der Hyperbel ist dem sechzehnten Theile von der Summe der Quadrate beyder Axen gleich. Fig. 212.

Denn

Denn es ist $CD^q = CA^q + AD^q = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$, folglich $AG^q = \frac{1}{4}CD^q = \frac{a^2 + c^2}{16}$.

§. 63.

Aufgabe. Eine Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten zu formiren. Fig. 212.

Man ziehe MQ der Asymptote Cr parallel. Nun ist auch Rr der DE parallel. Folglich ist $\triangle RQM \sim RCr \sim CDE$, und $ED : DC = RM : RQ = Mr : CQ$, auch $DE : EC = RM : QM$. Folglich ist $CQ = \frac{Mr . DC}{ED}$, und $QM = \frac{RM . EC}{ED}$. Nun ist $Mr = z + y$, $MR = z - y$, auch $DC = EC = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{4}}$, und $ED = c$. Folglich ist $CQ . QM = \frac{(z + y)(z - y)\left(\frac{a^2 + c^2}{4}\right)}{c^2}$. Nun ist $(z + y)(z - y) = z^2 - y^2 = \frac{1}{4}c^2$. Folglich ist $CQ . QM = \frac{\frac{1}{4}c^2}{c^2} . \frac{a^2 + c^2}{4} = \frac{a^2 + c^2}{16}$, der Potenz der Hyperbel §. 62. Siehet man nun CQ, QM, als Coordinaten an, und setzt $CQ = p$, $QM = q$: so ist $pq = \frac{a^2 + c^2}{16}$ die Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten, wobey der Coordinatenwinkel MQR dem Asymtotenwinkel DCE gleich ist.

Anmerkung. Hiernach kann man für jedes p die Größe $q = \frac{a^2 + c^2}{16p}$ finden, und die Punkte der Curve, wie M, bestimmen.

§. 64.

Eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Axen einander, und daher auch dem Parameter gleich sind. Fig. 212.

Zusatz. 1. Da hier $c = a$, folglich $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a$, das ist $DA = AC$, folglich $DCA = 45^\circ$, und daher $DCE = 90^\circ$, so heißt die gleichseitige Hyperbel auch rechtwinklicht.

2. Setzt man in den gefundnen allgemeinen Gleichungen für die Hyperbel a anstatt c: so erhält man die Gleichungen für die rechtwinklichte Hyperbel. Hiernach ist die Hauptgleichung §. 50. $y^2 = ax + x^2$; die Gleichung aus dem Mittelpunkte §. 55. $y^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2$; die Gleichung zwischen den Asymptoten §. 63. $q = \frac{2a^2}{16p} = \frac{a^2}{8p}$.

§. 65.

Eine Linie, für welche bey rechtwinklichten Coordinaten $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$ ist, heiße die Cissoide des Diokles. Eine Linie, für welche $y = x$ ist, wobey x einen Cirkelbogen bedeutet, heiße die Cycloide, oder Radlinie.

Anmerkung. Die Ausführung dieser und andrer Linien bleibt in den ersten Elementen ausgesetzt, und sind solche nur als Beyspiele angeführt worden, daß es außer den Kegelschnitten noch andre Linien gebe, welche ganz andre Functionen bestimmen.

IV. Allgemeine Betrachtung der Linien.

§. 66.

Der Hauptunterschied der Functionen beruhet auf der verschiednen Art, wie die veränderlichen Größen in der Function, oder in der Gleichung, wodurch die Function

Function gegeben ist, vorkommen. Hiernach ist die Function

1. Irrational, oder rational, je nachdem die veränderliche Größe irgendwo unter dem Wurzelzeichen vorkommt, oder nicht.

2. Gebrochen oder ganz, je nachdem die veränderliche Größe irgendwo im Nenner eines Bruchs vorkommt, oder nicht.

3. Einförmig und vielförmig, je nachdem die veränderliche Größe einen oder mehrere Werthe hat, das ist, in der ersten, oder in höhern Dimensionen vorkommt (§. 18.)

4. Gleichartig, und ungleichartig, je nachdem die veränderliche Größen in allen Gliedern einerley Dimension haben oder nicht; da denn im letztern Fall die Ordnung nach der höchsten Dimension bestimmt wird (§. 18.)

5. Algebraisch und trascendentisch, je nachdem die veränderliche Größe eine bestimmte oder eine ganz unbestimmte Anzahl von Werthen hat.

So ist z. E. $ax^2 - cy^2$ rational; $az - x^2 \sqrt{(a^2 - xy)}$ irrational; beyde ganz; $\frac{x^2}{a - x}$ gebrochen; $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3$, gleichartig; $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f$, ungleichartig; alle algebraisch; $a\,log.\,y + b\,sin.\,x + c\,tang.\,(x - y)$ transcendentisch.

Zusatz. Die Function ist algebraisch, wenn zu jedem x eine bestimmte Menge von y, so viel Abmessungen nämlich y hat, gehören; in einer transcendenten Function hingegen gehören zu einem x unzählig viele y, die aber zum Theil möglich, zum Theil unmöglich seyn können. Sie heißt transcendent, weil die veränder-

lichen

lichen Größen von Dingen abhängen, als von Cirkelbogen, Logarithmen, und dergleichen, welche außerhalb dem Gebiete der Algebra liegen.

§. 67.

Nach dem Unterschiede der Functionen, wodurch Linien bestimmt sind, werden letztre auch in verschiedne Arten und Familien, oder Geschlechter und Ordnungen eingetheilt. Denn je nachdem solche Functionen algebraisch, oder transcendentisch sind, werden auch die Linien algebraisch, oder transcendentisch; jene von einer bestimmten oder endlichen, diese von einer unbestimmten oder unendlichen Ordnung.

Zu den algebraischen Linien der ersten Ordnung gehört allein die gerade Linie; der zweyten Ordnung, der Cirkel, und die Kegelschnitte; der dritten die Cissoide des Diokles. Zu den transcendenten Linien gehört die Cycloide oder Radlinie.

Zusatz. Transcendente Linien geben für jedes x eine unzählige Menge von y, und können daher von einer geraden Linie in unzähligen Punkten geschnitten werden, obgleich daraus nicht folgt, daß sie auch wirklich in unzähligen Punkten immer geschnitten werden; indem es sich wohl treffen könnte, daß eine bestimmte Menge von Durchschnittspunkten möglich, die übrigen alle unmöglich wären. Denn gehörten zu jedem x eine bestimmte Menge von y: so müßte sich solches durch eine algebraische Gleichung zwischen beyden angeben lassen, die nicht höher als auf den Grad dieser Menge steigen könnte; und hätte man alsdenn eine algebraische Linie.

§. 68.

§. 68.

Krumme Linien heißen ähnlich, wenn die beständigen Größen ihrer Functionen, oder auch die jenen proportionirten veränderlichen Größen, einerley Verhältniß haben.

So sind Ellipsen einander ähnlich, wenn ihre Axen einander, oder den Parametern proportionirt sind, so daß, wenn man in ihnen Abscissen in der Verhältniß der grossen, oder der kleinen Axen, oder der Parameter nimmt, alsdenn die zugehörigen Ordinaten eben die Verhältniß haben. Gleiches gilt auch von den Hyperbeln. Man erhält dergleichen ähnliche Ellipsen oder Hyperbeln, wenn man ihre Schnitte unter gleichen Winkeln macht. Daher sind auch alle Parabeln, und alle Cirkel, und überhaupt alle Linien, deren Function nur eine beständige Größe enthält, einander ähnlich.

§. 69.

Die Construction, Verzeichnung, einer Function oder Gleichung erfodert, ihren geometrischen Ort darzustellen, das ist, Linien zu verzeichnen, welche ihre Wurzeln vorstellen; wodurch also jede Aufgabe, von welcher Natur sie auch sey, wenn sie auf eine Gleichung gebracht ist, und man sich die darinn vorkommenden Größen unter geraden Linien gedenkt, geometrisch, das heißt, durch ausgedehnte Größen aufgelößt wird.

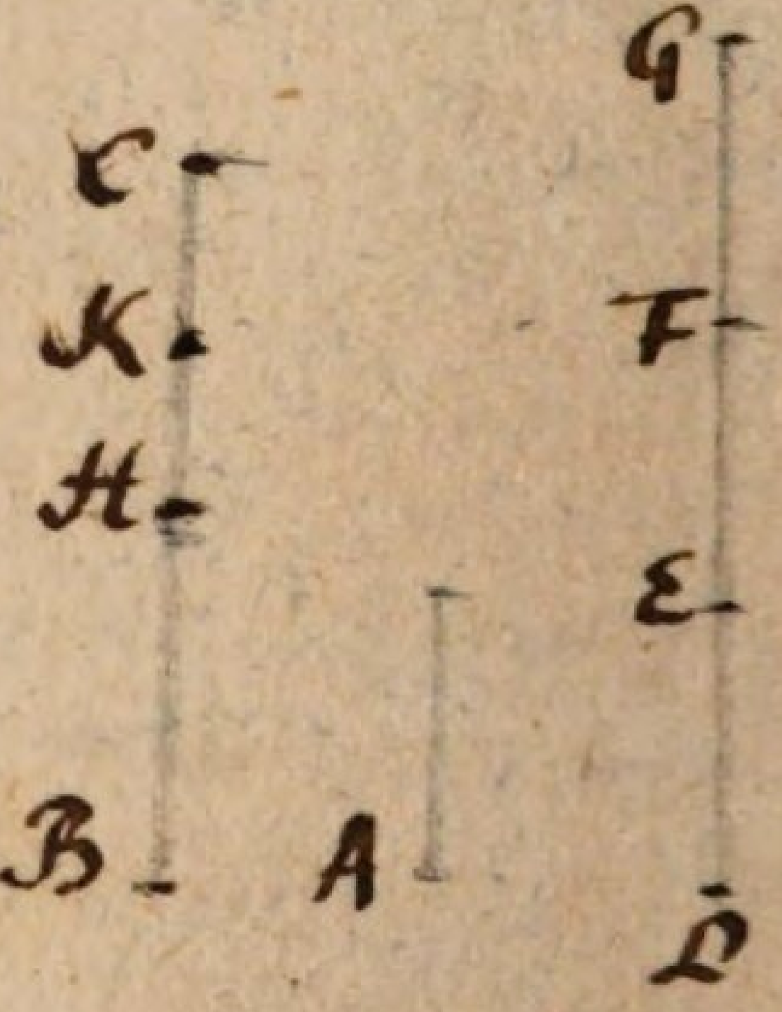
Zusatz. 1. Hiezu theilten die Alten ihre Aufgaben in ebene, *plana;* in körperliche, *solida;* und in solche die weder eben noch körperlich sind, *linearia;* wovon erstere durch Linien in einer Ebene, also durch die gerade Linie und den Cirkel; mittlere, durch Linien auf einem Körper, dergleichen die Kegelschnitte sind; und letztre

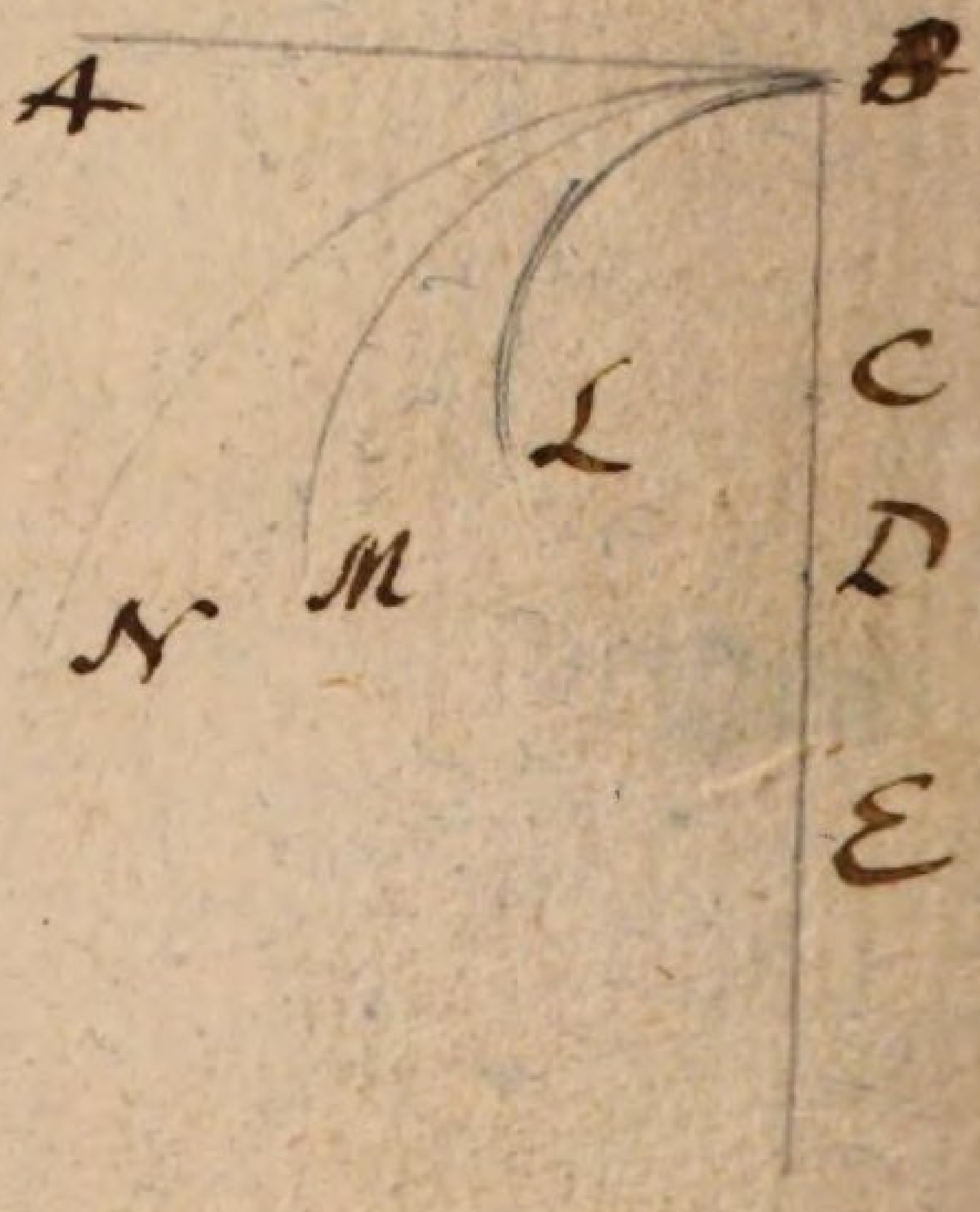
durch

durch Linien aufgelößt werden, die zusammengesetzter als die Kegelschnitte sind.

2. Ueberhaupt werden dergleichen Constructionen in geometrische, und in mechanische oder transcendente eingetheilt, je nachdem sich solche nach Vorschrift der reinen Geometrie, oder nicht bewerkstelligen lassen. Ihre Simplicität aber beruhet nicht auf der einfachern Gleichung, sondern auf der einfachern Verzeichnung der dazu erfoderlichen Linien; daher man zur Construction z. E. den Cirkel der Parabel, deren Gleichung doch einfacher ist, vorziehet.

Drit-


C
K
H
B
A
G
F
E
D


A
B
C
L
D
M
N
E

Dritter Abschnitt.

Die höhere Analysis oder die Analysis des Unendlichen.

1. Von der Differentialrechnung
2. Von der Integralrechnung.

Erstes Kapitel.

Von der Differentialrechnung.

I. Natur der Differentiale.

§. 1.

Aufgabe. Es soll eine Größe, die kleiner ist, als jede gegebene noch so kleine Größe A, quantitas omni dabili minor, gefunden werden. Fig. 213.

Man nehme eine beliebige Größe BC, und mache von A ein Vielfaches, DG > BC. Nimmt man nun von BC die Hälfte BH, und von DG weniger als die Hälfte DE: so ist der Rest HC < EG. Nimmt man von HC die Hälfte HK, und von EG die Hälfte EF: so ist der Rest KC < FG. Nun ist FG = A. Folglich ist KC < A.

Zusatz. 1. Wäre die gegebene Größe auch die allerkleinste, die man nur geben kann: so läßt sich doch eine Größe darstellen, welche noch kleiner ist; wovon man auch ein Beyspiel an dem Winkel ABL siehet, welchen Fig. 214. die Tangente eines Cirkels mit dem Bogen im Berührungspunkte einschließt, und welcher kleiner ist,

als jeder auch noch so kleine geradlinichte Winkel. Denn gäbe es einen noch kleinern Winkel: so müßte zwischen der Tangente AB, und dem Bogen BL, eine gerade Linie fallen, welches III. §. 80. unmöglich ist.

2. Selbst eine solche Größe, welche kleiner ist, als das allerkleinste, läßt sich ohne Ende in noch kleinere Theile theilen. Es sey nämlich Fig. 214. BL aus C mit den Halbmesser CB gezogen, und AB eine Tangente in B: so ist nach Obigen ABL kleiner als der allerkleinste geradlinichte Winkel. Verlängert man nun BC, und ziehet aus entferntern Punkten D, E, u. s. w. die Bogen BM, BN, u. s. w. so ist offenbar, daß ABM < ABL; ABN < ABM u. s. w. ohne Ende sey.

§. 2.

Jede endliche Größe mit einer unendlichen dividirt, giebt Null; und mit Null dividirt, eine unendliche Größe zum Quotienten.

Jeder Bruch wird bey einerley Zähler desto kleiner, je größer sein Nenner ist, verschwindet aber, so groß auch immer der Nenner seyn mag, nicht eher gänzlich, als bis der Nenner unendlich groß ist. Z. E. die Brüche $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ ..... $\frac{1}{\infty}$ (wo durch ∞ ein unendlich Großes, quantitas omni dabili maior, dergleichen z. E. die Tangente des rechten Winkels ist, bezeichnet wird) werden immer kleiner und kleiner, so wie ihre Nenner größer werden, behalten aber immer noch einigen Werth, so klein solcher auch seyn mag. Eben dies heißt mit andern Worten: aus diesen Brüchen wird Null, wenn der Nenner unendlich groß ist, oder der Bruch $\frac{1}{\infty}$ ist ein wirkliches Nichts, $\frac{1}{\infty} = 0$, wodurch man nichts anders sagt, als daß ein Bruch nicht

eher

eher Nichts werden könne, als bis der Nenner ins Unendliche vermehrt worden sey.

Siehet man demnach 0 als den Quotienten an, welcher entstehet, wenn man den Dividendus 1, mit dem Divisor ∞, dividirt, das ist, setzt man $\frac{1}{\infty} = 0$: so muß nach den Regeln der Division, nach welchen man beliebig den Quotienten und Divisor mit einander verwechseln kann, $\frac{1}{0} = \infty$ seyn, das ist, der Dividendus 1, mit dem Divisor 0, dividirt zum Quotienten eine unendlich große Zahl geben; wodurch wiederum nichts anders angezeigt wird, als daß die Null in der Einheit, oder in einer Zahl, unendlichemal enthalten sey, oder daß aus Null nie die Einheit oder eine Zahl werden könne.

Zusatz. Ein solcher Theil von einer Größe, als der Bruch $\frac{1}{\infty}$ anzeigt, heißt ein **unendlich kleiner Theil** solcher Größe, und ist ein wirkliches Nichts. Der Bequemlichkeit wegen zeigt man ihn auch durch den Buchstaben d an.

§. 3.

Gedenkt man sich das unendlich Große, oder unendlich Kleine zu Potenzen erhoben: so heißen solche die Ordnungen des Unendlichen; wodurch man folgende Progreßionen erhält:

$$0,\quad 1,\quad \infty^1,\quad \infty^2,\quad \infty^3 \ldots\ldots$$

$$\infty,\quad 1,\quad \frac{1}{\infty},\quad \frac{1}{\infty^2},\quad \frac{1}{\infty^3} \ldots\ldots$$

Denn so wie man sich §. 2. $\frac{1}{0}$ gedenken kann, so läßt sich auch $\frac{n}{0}$ oder $n. \frac{1}{0} = n. \infty$, folglich auch $\infty. \infty = \infty^2$ gedenken. Demnach läßt sich $\frac{1}{\infty}$ und

 $\frac{1}{n.\infty}$

$\frac{1}{n.\infty}$, folglich auch $\frac{1}{\infty.\infty} = \frac{1}{\infty^2}$ gedenken. Zugegeben also, daß dergleichen Potenzen des Unendlichen etwas Unmögliches wären, welches die Metaphysik untersuchen mag: so läßt sich doch dieses, was es auch seyn möge, eben so richtig und genau in der Mathematik bezeichnen, als die unmöglichen und eingebildeten Größen, dergleichen $\sqrt{-x}$ ist, sind bezeichnet worden. Und so, wie von dieser Bezeichnungsart im Vorhergehenden ist Gebrauch gemacht worden; so wird auch der Gebrauch von jener sich in der Folge zeigen.

Nun ist nach den Gesetzen der Progreßion $0:1=1:\frac{1}{0}$, und §. 2. $\frac{1}{0} = \infty$; ferner $1 : \infty = \infty : \infty^2$ u. s. w. Dies giebt die erste Progreßion.

Eben so ist $\infty : 1 = 1 : \frac{1}{\infty}$, und $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$ u. s. w. Dies giebt die zweyte Progreßion.

Zusatz. Aus der Proportion $\infty : 1 = 1 : \frac{1}{\infty}$ folgt $\frac{1}{\infty}. \infty = 1$, oder das unendlich Kleine mit dem unendlich Großen multiplicirt, giebt was Endliches, das heißt, das unendliche Kleine ist in dem Endlichen unendlichemal enthalten. Und aus der Proportion $0 : 1 = 1 : \infty$ folgt $\frac{1}{0} = \infty$, das heißt, daß die Null in dem Endlichen unendlichemal enthalten sey; welches eben das sagt. Man vergleiche hiemit §. 2.

Anmerkung. Den Ordnungen des unendlich Kleinen kann §. 1. Zus. 1. 2. zur Erläuterung dienen.

§. 4.

Eine Größe verschwindet gegen eine andre Größe, wenn sie solche weder vermehrt noch vermindert. Demnach verschwindet

1. die Null gegen jede endliche Größe, weil $n \mp 0 = n$.

2. Jede endliche Größe gegen das unendlich Große der ersten Ordnung, und das unendlich Große einer niedrern Ordnung gegen das unendlich Große einer höhern. Denn es ist $0 : 1 = 1 : \infty^1 = \infty^1 : \infty^2$ u. s. w.

3. Das unendlich Kleine der ersten Ordnung gegen jedes Endliche, und das unendlich Kleine einer höhern Ordnung gegen das unendlich Kleine einer niedrern. Denn es ist $\infty : 1 = 1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$ u. s. w.

§. 5.

Das Differential einer veränderlichen Größe x, welche um einen unendlich kleinen Theil wächst oder abnimmt, ist der Unterschied zwischen ihren anfänglichen und dem auf die Veränderung folgenden Zustande; daher kein Differential einer beständigen Größe a, statt findet.

Eben so wie $\frac{x}{n} = \frac{1}{n} \cdot x$, oder der nte Theil von x ist: so ist auch $\frac{x}{\infty} = \frac{1}{\infty} x = dx$ ein unendlich kleiner Theil von x. Nun wird aus x durch das Wachsen oder Abnehmen $x \mp dx$. Folglich ist $(x \mp dx) - x = \mp dx$ das Differential der veränderlichen Größe x.

Bey einer beständigen Größe a, welche unverändert bleibt, ohne weder zu wachsen noch abzunehmen, ist der anfängliche Zustand a, und der nachmalige a. Daher ist $a - a = 0$, folglich $da = 0$, wodurch man anzeigt, daß es kein Differential einer beständigen Größe gebe.

Zusatz. 1. Das Differential einer veränderlichen Größe dx, oder $\frac{x}{\infty}$ ist zwar §. 2. auch = o, aber in einem andern Sinne als da = o. Durch jenes wird angezeigt, daß das Differential einer veränderlichen Größe statt finden könne, und sein Werth Null sey, das heißt, sich durch keine endliche Zahl ausdrücken lasse; durch dieses giebt man zu erkennen, daß das Differential einer beständigen Größe gar nicht statt finden könne, und daher ganz wegfallen müsse.

2. Die Ordnungen der Differentiale werden durch d, d^2, d^3, d^4 u. s. w. angezeigt. Denn ist dx eine beständige Größe: so hat solche kein Differential; ist sie aber veränderlich: so ist ihr Differential $\frac{dx}{\infty} = \frac{1}{\infty}\, dx =$ $ddx = d^2x$, wo d^2 statt $\frac{1}{\infty^2}$, und überhaupt d^n statt $\frac{1}{\infty^n}$ gesetzt wird.

3. Das Zeichen des Differentials d, gehet nur auf die unmittelbar folgende Größe, und nicht einmal auf ihren Exponenten, vielweniger auf die mit ihr verbundnen Größen, wofern nicht alles zugleich in einer Parenthese eingeschlossen ist. Daher hat man folgende Ausdrücke wohl zu unterscheiden: dx^m, das Differential von x zu der Potenz m erhoben; $d\,(x^m)$ das Differential von x^m; und $d^m x$, das mte Differential von x. Eben so ist $d\,(ax - x^2)^m$; $d\,(\overline{ax - x^2}^m)$; $d^m\,(ax - x^2)$ unterschieden.

4. Da dx = o, und dy = o, so würde aus dem Differential einer jeden einzelnen Größe an sich gar nichts folgen, und sich daraus nicht das geringste ableiten lassen. Allein man sucht auch nie das Differential irgend einer einzel-

einzelnen veränderlichen Größe anders, als in der Absicht, um solches mit dem Differential einer andern veränderlichen Größe zu vergleichen. Denn obgleich das Differential beyder Null ist, das heißt, sich durch keine endliche Größe ausdrücken läßt: so ist es doch möglich, daß solche Differentiale eine endliche Verhältniß haben können, auf eben die Art wie irrationale Größen eine rationale Verhältniß verstatten können; indem z. E. $\sqrt{12} : \sqrt{27} = \sqrt{4.3} : \sqrt{9.3} = 2\sqrt{3} : 3\sqrt{3} = 2 : 3$.

5. Nach dem Gesetze der Stetigkeit kommt keine Größe x, aus einem Zustand in den andern, ohne zuvor alle Zwischenstände betreten zu haben, und ihr nächstfolgender Zustand, in den sie zuerst tritt, muß derjenige seyn, zwischen dem sich kein andrer mehr denken läßt, dessen Unterschied vom anfänglichen daher durch keine endliche Größe ausgedrückt werden kann, welches sonst dem Begriffe des nächstfolgenden Zustandes wiedersprechen würde. Demnach ist dx, wodurch man solchen Unterschied anzeigt, in der That = 0, oder, welches hier der Sinn ist, läßt sich durch keine endliche Größe ausdrücken. Zeigte man nun den Unterschied eines weiter folgenden Zustandes vom anfänglichen durch Dx an, welches also eine endliche Größe ist: so ist offenbar, daß dieses Dx von dem dx abhängen müsse, und daß ein gleiches bey einer andern Größe von Dy und dy gelte. Sind nun x und y wie z. E. die Absciſſen und Ordinaten in einer gewissen abhängigen Verhältniß, so sind auch Dx, Dy, und folglich auch dx, dy, in einer gewissen abhängigen Verhältniß, was es auch für eine sey, und was für Größen auch dx, dy, seyn mögen.

§. 6.

Aufgabe. Das Differential einer jeden Function zu finden.

In der gegebenen Function setze man statt des anfänglichen Zustandes der veränderlichen Größen ihren nächstfolgenden Zustand, formire hieraus die Function aufs neue, und subtrahire davon die gegebene Function: so ist §. 5. der Rest das gesuchte Differential, worinn §. 4. die höhern Differentiale gegen die niedrigern verschwinden.

Z. E. d (ax^2) werde verlangt. In der gegebenen Function axx setze man $x + dx$ anstatt x, so erhält man $a(x^2 + 2xdx + dx^2)$, oder $ax^2 + 2axdx + adx^2$. Subtrahirt man hievon die gegebene Function ax^2: so ist der Rest $2axdx + adx^2$, worinn dx^2 gegen dx verschwindet. Demnach ist das gesuchte Differential, oder $d(ax^2) = 2axdx$.

Auf eben die Art, wenn man die Function $ax - yx$ differentiiren solte, setzt man $x + dx$ statt x, und $y + dy$ statt y, da denn $a(x + dx) - (y + dy)(x + dx) = ax + adx - xy - ydx - xdy - dxdy$. Subtrahirt man hievon die gegebene Function: so ist der Rest $adx - ydx - xdy - dxdy$, worinn dxdy verschwindet. Demnach ist das gesuchte Differential, oder $d(ax - yx) = adx - ydx - xdy$.

§. 7.

Die Differentialrechnung, calculus differentialis, ist die Methode, aus den gegebenen veränderlichen Größen, oder deren Functionen, die Differentiale von jeder Ordnung zu finden, um aus den Verhältnissen derselben unbekannte Größen abzuleiten. Man nennt solche insbesondre die Exponentialrechnung, wenn sie sich mit Größen, welche veränderliche Exponenten haben, beschäftigt. Alle übrige Größen, die nicht Exponentialgrößen sind, kann man im Gegensatz gemeine Größen nennen.

II. Dif-

II. Differentiirung gemeiner Größen.

§. 8.

Aufgabe. Das Differential einfacher Größen zu finden.

Man setze jeder dieser Größen mit Beybehaltung ihres Zeichens den Buchstaben d vor, und lasse, wenn beständige Größen dabey mit vorkommen, solche hinweg. Z. E. $d(x + a - y) = dx + o - dy = dx - dy$.

Denn setzt man in der gegebenen Function $x + dx$ statt x, und $y + dy$ statt y: so erhält man $x + dx + a - y - dy$, und, hievon die gegebene Function subtrahirt, zum Reste $dx - dy$. Demnach ist §. 6. $d(x + a - y) = dx - dy$.

§. 9.

Aufgabe. Das Differential eines Products zu finden.

Man multiplicire jeden der beyden Factoren mit dem Differential des andern, und addire beyde Producte Z. E. $d(xy) = xdy + ydx$.

Denn setzt man $x + dx$ statt x, und $y + dy$ statt y: so erhält man $(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$. Hievon die gegebene Function subtrahirt, giebt zum Reste $xdy + ydx + dxdy$, worinn $dxdy$ verschwindet. Demnach ist §. 6. $d(xy) = xdy + ydx$.

Zusatz. 1. Wäre einer der Factoren eine beständige Größe: so fällt das Glied, worinn sein Differential vorkommen müßte, weil dieses o wäre, hinweg. So ist z. E. $d.(ax) = adx$, weil $adx + xda = adx + o = adx$.

2. Bestünde das Product aus mehr als zwey Factoren: so multiplicire man das Differential eines jeden mit

dem Producte der übrigen Factoren. So ist z. E. $d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz$. Denn setzt man v statt xy so ist $d(vz) = vdz + zdv$. Nun ist $dv = d(xy) = xdy + ydx$. Folglich ist $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.

§. 10.

Aufgabe. Das Differential eines Quotienten oder Bruchs zu finden.

Man multiplicire den Nenner mit dem Differential des Zählers, und den Zähler mit dem Differential des Nenners, subtrahire beyde Producte, und dividire die Differenz mit dem Quadrate des Nenners. Z. E. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Denn nach gehöriger Substitution hat man $\frac{x + dx}{y + dy}$, und hievon die gegebene Function subtrahirt, $\frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y}$, und zu einerley Benennung gebracht, $\frac{xy + ydx - xy - xdy}{y^2 + ydy} = \frac{ydx - xdy}{y^2 + ydy}$, wo ydy gegen y^2 verschwindet. Demnach ist §. 6. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Zusatz. 1. Wäre Zähler oder Nenner des Bruchs eine beständige Größe, so fällt das Glied, worinn ihr Differential vorkommt, aus. Z. E. $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{xda - adx}{x^2} = \frac{0 - adx}{x^2} = \frac{-adx}{x^2}$. Und $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - xda}{a^2} = \frac{adx - 0}{a^2} = \frac{adx}{a^2}$.

2. Ist

2. Ist Zähler oder Nenner eine zusammengesetzte Größe: so verbinde man die vorhergehenden Regeln. So ist z. E. $d\left(\frac{x+y}{z}\right) = \frac{z\,d(x+y) - (x+y)\,dz}{z^2}$ $= \frac{zdx + zdy - xdz - ydz}{z^2}$; und $d\left(\frac{x}{y+z}\right) = \frac{(y+z)\,dx - xd(y+z)}{(y+z)^2} = \frac{ydx + zdx - xdy - xdz}{y^2 + 2yz + z^2}$; und $d\left(\frac{xy}{x-y}\right) = \frac{(x-y)\,d(xy) - xy.\,d(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)(xdy + ydx) - xy(dx - dy)}{x^2 - 2xy + y^2}$.

§. 11.

Aufgabe. Das Differential einer Potenz zu finden.

Mit dem Exponenten der veränderlichen Größe multiplicire man die um einen Grad verminderte Potenz der veränderlichen Größe, und dies Product noch mit dem Differential derselben. Z. E. $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Denn setzt man $x + dx$ anstatt x, so ist II. §. 40. $(x+dx)^m = x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m.\,m-1}{1.\;\;2.}x^{m-2}dx^2 \ldots$ Subtrahirt man hievon die gegebene Function, so ist der Rest $mx^{m-1}dx + \frac{m.\,m-1}{1.\;\;2.}x^{m-2}dx^2 \ldots\ldots$ worinn das zweyte Glied und alle folgende verschwinden. Demnach ist §. 6. $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Zusatz. 1. Wurzelgrößen kann man mit einem gebrochnen Exponenten ansetzen, und alsdenn nach Art der Potenzen differentiiren. Z. E. $d(\sqrt[m]{x}) = d(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}dx = \frac{1}{m}x^{\frac{1-m}{m}}dx = \frac{1}{m}\sqrt[m]{x^{1-m}}\,dx$.

2. Kom-

2. Kommen Potenzen oder Wurzelgrößen im Nenner eines Bruchs vor: so werden ihre Exponenten negativ angesetzt. So ist z. E. $d\left(\frac{a}{x^m}\right) = d(ax^{-m}) = -max^{-m-1}dx = \frac{-madx}{x^{m+1}}$; und $d\left(\frac{a}{\sqrt[n]{x^m}}\right) = d(ax^{-\frac{m}{n}}) = -\frac{m}{n}ax^{-\frac{m}{n}-1}dx = -\frac{m}{n}ax^{\frac{-m-n}{n}}dx = \frac{-madx}{n\sqrt[n]{x^{m+n}}}$.

Auf eben die Art ist auch §. 10. $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(xy^{-1})$.

3. Ist die gegebene Function irgend eine Potenz eines zusammengesetzten Ausdrucks: so läßt sich leicht ihr Differential nach der Analogie finden. So ist z. E. $d\left(\overline{a+bx+cx^2}^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}.\overline{a+bx+cx^2}^{\frac{m-n}{n}}.d(a+bx+cx^2) = \frac{m}{n}\sqrt[n]{\overline{a+bx+cx^2}^{m-n}}.(bdx+2cxdx)$.

§. 12.

Aufgabe. Jede höhere Differentiale zu finden.

Da §. 5. Zus. 2. $d^n(x) = d(d^{n-1}x)$ ist: so erhält man jedes höhere Differential, wenn man das nächstvorhergehende als eine gemeine veränderliche Größe ansieht, und nach den bisherigen Regeln ihr Differential sucht; wozu also das nächstvorhergehende Differential gegeben, oder durch alle vorhergehende Stuffen vorher aufgesucht werden muß.

Sollte z. E. von der Function $x+a-y$ das Differential der zweyten Ordnung, oder das zweyte Differential, gefunden werden: so ist $d(x+a-y) = dx-dy$; folglich

folglich $d^2(x + a - y) = d(dx - dy) = d^2x - d^2y$. Demnach wäre das dritte Differential eben dieser Function $d(d^2x - d^2y) = d^3x - d^3y$; und so auch die folgenden Differentiale.

Von der Function xy ist das erste Differential, $d(xy) = xdy + ydx$, folglich das zweyte, $d(xdy + ydx) = xd^2y + dydx + yd^2x + dxdy = xd^2y + yd^2x + 2dxdy$.

Von der Function x^m ist das erste Differential, $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, folglich das zweyte, $d(mx^{m-1}dx) = mx^{m-1}d^2x + (m-1)mx^{m-2}dx^2$.

Von der Function $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ ist das erste Differential, $d(xy^{-1}) = -xy^{-2}dy + y^{-1}dx$, folglich das zweyte, $d(y^{-1}dx - xy^{-2}dy) = y^{-1}d^2x - y^{-2}dxdy - y^{-2}dxdy + 2y^{-3}xdy - xy^{-2}d^2y = \frac{d^2x}{y} - \frac{2dxdy}{y^2} + \frac{2xdy}{y^3} - \frac{xd^2y}{y^2} = \frac{y^2d^2x - 2ydxdy + 2xdy - xyd^2y}{y^3}$.

Zusatz. 1. Hieraus erhellet, wie man jede gegebene Function, worinn Differentialgrößen vorhanden sind, sie mag nun aus einer genauen Differentiirung entstanden seyn, oder nicht, differentiiren müsse. Und dies ist der gewöhnliche Fall bey Aufsuchung höherer Differentiale; wofür die beyden folgenden Aufgaben.

2. Enthält die gegebene Function, welche man differentiiren soll, Differentiale zweyer veränderlichen Größen x, y, dergleichen die Abscissen und Ordinaten sind: so wird gemeiniglich das eine, gewöhnlich dx, als eine beständige Größe angesehen und behandelt, wodurch die Formel für das höhere Differential abgekürzt wird. In den

den folgenden Aufgaben, werden stets beyderseitige Differentiale als veränderliche Größen behandelt.

§. 13.

Aufgabe. Jede Function, welche Differentiale der ersten Ordnung enthält, zu differentiiren.

1. $d\left(\frac{ydy}{dx}\right) = d(ydydx^{-1}) = dx^{-1}dy^2 + ydx^{-1}d^2y - ydx^{-2}dxdy = \frac{dy^2}{dx} + \frac{yd^2y}{dx} - \frac{ydxdy}{dx^2} = \frac{dxdy^2 + ydxd^2y - ydxdy}{dx^2}$. §. 9. Zus. 2.

2. $d(\sqrt{dx + dy}) = d(\overline{dx + dy}^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\overline{dx + dy}^{\frac{1}{2}-1} \cdot d(dx + dy) = \frac{1}{2}\overline{dx + dy}^{-\frac{1}{2}}.(d^2x + d^2y) = \frac{d^2x + d^2y}{2\sqrt{(dx + dy)}}$. §. 11. Zus. 1.

3. $d\left(\frac{ydy}{\sqrt{(dx + dy)}}\right) = \frac{\sqrt{dx + dy}\,(yd^2y + dy^2) - ydy.\ d(\overline{dx + dy}^{\frac{1}{2}})}{dx + dy}$. §. 10.

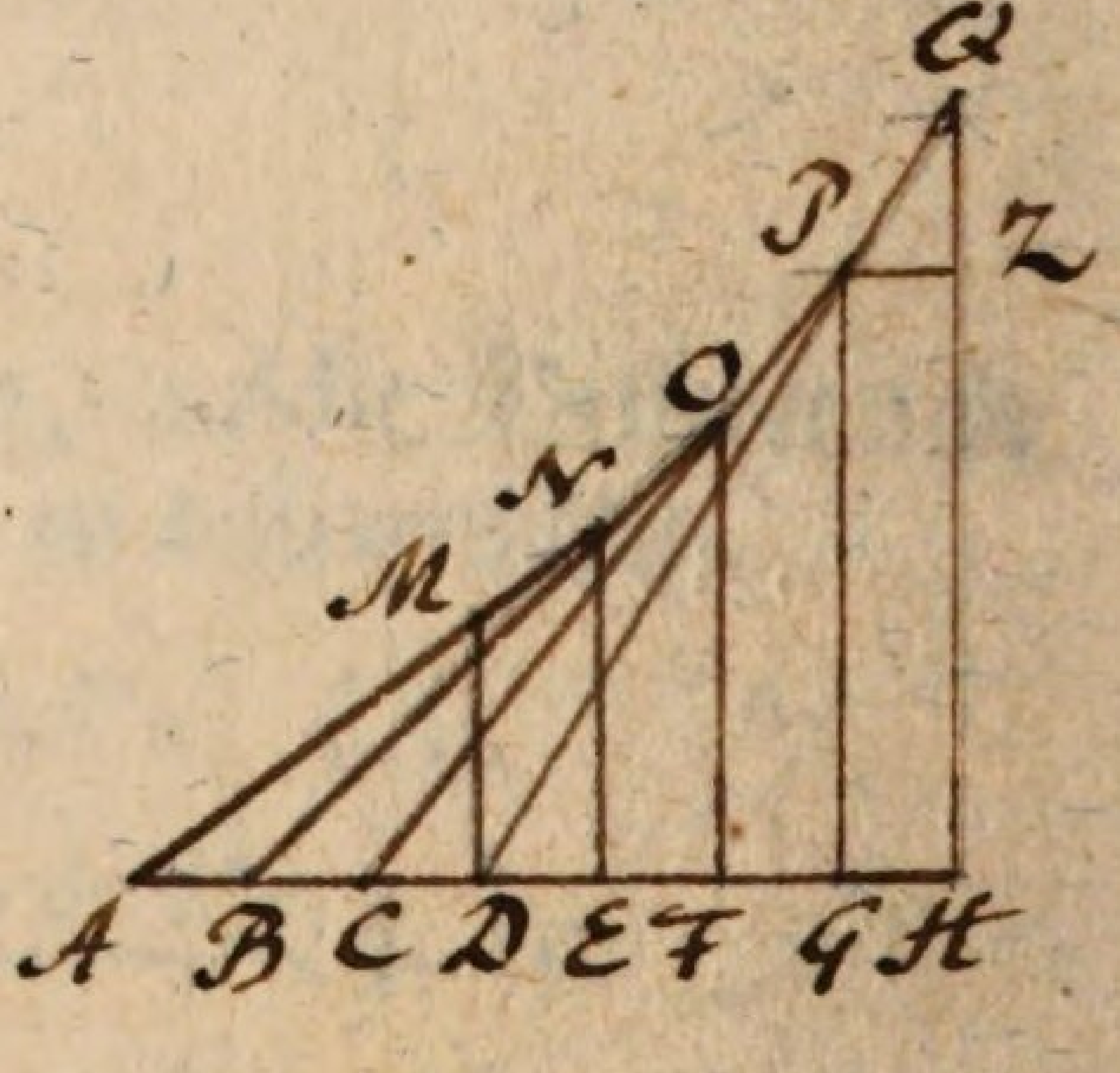
§. 14.

Aufgabe. Jede Function, welche Differentiale der zweyten Ordnung enhält, zu differentiiren.

1. $d(dxdy) = dxd^2y + dyd^2x$. §. 9.

2. $d\left(\frac{dx^2}{dy}\right) = \frac{2dydxd^2x - dx^2d^2y}{dy^2}$ §. 10.

Anmerkung. Diese beyden Beyspiele zeigen, wie Differentiale auch von einer Ordnung gemacht werden, welche die zweyte übersteigt. Dergleichen aber kommen selten vor; daher man sich auf die zweyte Differentiirung, welche von häufigerm Gebrauch ist, füglich einschränken kann.


Q
P
Z
O
N
M
A B C D E F G H

III. Differentiirung der Exponentialgrößen.

§. 15.

Ist eine Größe zu einer Potenz von veränderlichen Exponenten erhoben: so heißt diese Potenz eine **Exponentialgröße**, quantitas exponentialis. Nun soll entweder solcher Exponent, oder solche Potenz selbst differentiirt werden. Im ersten Falle entstehen die logarithmischen Differentiale, weil der Exponent der Logarithmus der Potenz ist; im zweyten Falle ist bey solcher Potenz entweder der Exponent allein, oder so wohl die Größe selbst, als auch ihr Exponent, veränderlich.

Es sey z. E. $a^x = y$, oder $z^x = y$. Nun lehrt die **Exponentialrechnung**, nicht nur dx, das ist, $d(\log. y)$, wo y entweder eine einfache oder eine zusammengesetzte Größe seyn kann; sondern auch dy, das ist, entweder $d(a^x)$, oder $d(z^x)$ finden.

§. 16.

Aufgabe. Die Logistik, oder logarithmische Linie, worinn die Abscissen die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten sind, zu beschreiben. Fig. 215.

Eine gerade Linie AH, theile man in beliebig gleiche Theile in A, B, C, D u. s. w. In einem dieser Punkte, etwa D, errichte man den Perpendikel DM so lang man will, und ziehe mit ihm durch die folgenden Punkte E, F, G, H, u. s. w. Parallelen. Hierauf ziehe man AMN, welche die ersten Parallele in N trifft; alsdenn BNO, welche die zweyte Parallele in O trifft; alsdenn COP, welche die dritte Parallele in P trifft; alsdenn DPQ, welche die vierte Parallele in Q trifft, und so immer fort. Eine krumme Linie, welche durch die auf vorgemeldete

meldete Art gefundnen Punkte M N O P Q etc. gehet, ist die gesuchte logarithmische Linie.

Denn nach der Verzeichnung ist DM : EN = AD : AE, und EN : FO = BE : BF, auch ist AD = BE, AE = BF, und daher AD : AE = BE : BF. Folglich ist auch DM : EN = EN : FO, das ist, DM, EN, FO, sind in stetiger geometrischer Proportion. Auf eben die Art beweißt man solches auch von allen folgenden Ordinaten. Nun sind die ihnen zugehörigen Abscissen AD, AE, AF, AG, AH u. s. w. nach der Verzeichnung in stetiger arithmetischer Progreßion. Folglich sind diese die Logarithmen von jenen.

Zusatz. 1. Sind die angenommenen gleichen Theile auf AH unendlich klein: so sind auch die Theile der Curve zwischen den gefundnen Punkten unendlich klein; alsdenn sind die Linien AM, BN, CO, DP u. s. w. die Tangenten der Logistik in den gefundnen Punkten, und daher AD, BE, CF, DG, u. s. w. die zugehörigen Subtangenten VI. §. 21. Auch ist in dieser Voraussetzung jeder der gleichen Theile, wie GH oder PZ, das Differential der Abscisse, dx, und ZQ das Differential der zugehörigen Ordinate, dy.

2. Da nach der Verzeichnung AD = BE = CF = DG u. s. w. so ist die Subtangente der Logistik eine beständige Größe, welche daher auch die Basis eines logarithmischen Systems heißt, und durch a soll bezeichnet werden.

§. 17.

Aufgabe. Eine Function für die logarithmische Linie zu finden. Fig. 215.

Da

Da $\triangle QPZ \sim \triangle PDG$: so ist $QZ : PZ = PG : DG$, das ist, $dy : dx = y : a$. Folglich ist $ady = ydx$, folglich $\frac{ady}{y} = dx$, die Function für die Logistik.

§. 18.

Aufgabe. Die logarithmischen Differentiale zu finden.

Man dividire das Differential der Größe, deren Logarithmus zu differentiiren ist, mit der Größe selbst: so ist der Quotient das gesuchte logarithmische Differential.

Es sey $a^x = y$: so ist $x = \log. y$, folglich §. 17. $dx = d(\log. y) = \frac{ady}{y}$. Setzt man hierinn $a = 1$: so ist $d(\log. y) = \frac{dy}{y}$; welche Regel auch für alle zusammengesetzte Fälle hinreichend ist. Denn

1. Es sey $x = \log. y^m$, so ist $dx = \frac{my^{m-1}dy}{y^m} = my^{-1}dy = \frac{mdy}{y} = m.\frac{dy}{y}$.

2. Es sey $x = \log. (1 + y^2)$, so ist $dx = \frac{2ydy}{1 + y^2}$.

3. Es sey $x = \log. \left(\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)}}\right)$, oder $x = \log. y - \log(1+y^2)^{\frac{1}{2}} = \log. y - \frac{1}{2}\log.(1+y^2)$, so ist $dx = \frac{dy}{y} - \frac{ydy}{1+y^2}$ und, auf einerley Benennung gebracht, $dx = \frac{dy + y^2dy - y^2dy}{y(1+y^2)} = \frac{dy}{y(1+y^2)}$.

4. Es sey $x = \log. (\overline{a+y}.\ \overline{b+y}.\ \overline{c+y})$ oder $x = \log. (a+y) + \log. (b+y) + \log. (c+y)$, so ist $dx = \frac{dy}{a+y} + \frac{dy}{b+y} + \frac{dy}{c+y}$.

5. Es sey $x = \log. \sqrt{\frac{a+y}{a-y}}$, oder $x = \log. \left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2} \log. (a+y) - \frac{1}{2} \log. (a-y)$, so ist $dx = \frac{\frac{1}{2} dy}{a+y} + \frac{\frac{1}{2} dy}{a-y} + \frac{\frac{1}{2} ady - \frac{1}{2} ydy + \frac{1}{2} ady + \frac{1}{2} ydy}{a^2 - y^2}$ $= \frac{ady}{a^2 - y^2}$.

6. Es sey $x = (\log. y)^2$. Man setze $\log. y = p$ oder $(\log y)^2 = p^2$, so ist $d(\log. y)^2 = 2pdp = 2 \log. y \times d(\log. y) = 2 \log. y. \frac{dy}{y}$; welches mit der allgemeinen Regel §. 11. völlig übereinstimmt, nach welcher $d(\log. y)^2 = 2 \log. y. d(\log. y) = 2 \log. y. \frac{dy}{y}$.

Demnach ist überhaupt $d(\log. y)^n = n(\log. y)^{n-1}. \frac{dy}{y}$.

§. 19.

Aufgabe. Das Differential der veränderlichen Potenz einer beständigen Größe zu finden.

Es sey $y = a^x$, so ist das Differential dieser Function ein Product aus drey Factoren, wovon der erste die Function selbst, a^x, der zweyte das Differential des veränderlichen Exponenten, dx, und der dritte der Logarithmus der beständigen Größe, $\log. a$, ist; oder $d(a^x) = a^x dx \log. a$.

Denn da $y = a^x$, so ist $\log. y = x \log. a$. Nun ist $d(\log. y) = \frac{dy}{y}$ und $d(x \log. a) = dx \log. a$. Folglich ist $\frac{dy}{y} = dx \log. a$, folglich $dy = d(a^x) = ydx \log. a$ $= a^x dx \log. a$.

§. 20.

Aufgabe. Das Differential der veränderlichen Potenz einer veränderlichen Größe zu finden.

Es sey $y = z^x$, so ist das Differential dieser Function die Summe zweyer Differentiale solcher Function, welche man findet, wenn man einmal die veränderliche Größe z, das andremal ihren veränderlichen Exponenten, als eine beständige Größe behandelt; oder $d(z^x) = z^x dx \log. z + xz^{x-1} dz$.

Denn da $y = z^x$, so ist $\log. y = x \log. z$, folglich $\frac{dy}{y} = dx \log. z + x \frac{dz}{z}$, folglich $dy = ydx \log. z + yx \frac{dz}{z}$. Setzt man in diese Gleichung den Werth $y = z^x$, so erhält man $dy = d(z^x) = z^x dx \log. z + xz^{x-1} dz$.

IV. Gebrauch der Differentiale.

§. 21.

Aufgabe. Allgemeine Formeln für gerade Linien, die zur Theorie der Curve gehören, zu finden. Fig. 216.

Es sey AMS eine Curve, deren Axe AN, und durch einen beliebigen Punkt der Curve M die Mr der AN parallel, auch $Pp = Mr = dx$; so ist $rm = dy$, und TM die Tangente für M, und daher PT die Subtangente. Nun sey MN senkrecht auf TM: so ist MN die Normale, PN die Subnormale. VI. §. 21.

Bey rechtwinklichten Coordinaten ist $\Delta Mmr \sim \Delta TMP \sim \Delta PMN$, folglich

1. $mr : Mr = MP : PT$, das ist, $dy : dx = y : PT$, folglich die Subtangente $PT = \frac{ydx}{dy}$.

2. TP : PM = PM : PN, das ist, $\frac{ydx}{dy} : y = y : PN$, folglich die Subnormale $PN = \frac{ydy}{dx}$.

3. $TM^q = TP^q + PM^q$, das ist, $TM^q = \frac{y^2dx^2}{dy^2} + y^2$ $= \frac{y^2dx^2 + y^2dy^2}{dy^2} = \frac{y^2}{dy^2} \cdot (dx^2 + dy^2)$ folglich die Tangente $TM = \frac{y}{dy} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

4. $MN^q = PN^q + PM^q$, das ist, $MN^q = \frac{y^2dy^2}{dx^2} + y^2$ $= \frac{y^2dy^2 + y^2dx^2}{dx^2} = \frac{y^2}{dx^2} (dy^2 + dx^2)$, folglich die Normale $MN = \frac{y}{dx} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

§. 22.

Aufgabe. Es ist die Gleichung für eine Curve bey rechtwinklichten Coordinaten gegeben; man soll die zu ihrer Theorie gehörigen geraden Linien bestimmen.

Man differentiire die gegebene Gleichung, bestimme den Werth der Differentiale durch die in der Gleichung enthaltnen Größen, und setze solchen Werth in die §. 21. gefundnen allgemeinen Formeln, um aus denselben die Differentiale zu eliminiren: so hat man alsdenn die verlangten Linien durch endliche Größen bestimmt.

Es sey z. E. die Gleichung für die Parabel, $y^2 = px$, gegeben: so ist $2ydy = pdx$, folglich $dy = \frac{pdx}{dy}$, und

dx =

$dx = \frac{2ydy}{p}$, folglich $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{dy^2}$, und $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$. Nun ist §. 21.

1. Die Formel für die Subtangente $\frac{ydx}{dy}$. Setzt man für dx den gefundnen Werth, so ist die Subtangente der Parabel $= \frac{y}{dy} \cdot \frac{2ydy}{p} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$.

2. Die Formel für die Tangente $\frac{y}{dy} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Folglich ist das Quadrat der Tangente $\frac{y^2dx^2}{dy^2} + y^2$, oder wenn man für dx^2 den gefundenen Werth setzt, $\frac{y^2}{dy^2} \cdot \frac{4y^2dy^2}{p^2} + y^2 = \frac{4y^4}{p^2} + y^2$. Nun ist $y^2 = px$ und daher $y^4 = p^2x^2$. Folglich ist das Quadrat der Tangente $= \frac{4p^2x^2}{p^2} + px = 4x^2 + px$, folglich die Tangente der Parabel $= \sqrt{(4x^2 + px)}$.

3. Die Formel für die Subnormale $\frac{ydy}{dx}$, oder, wenn man für dx den gefundnen Werth setzt, $ydy : \frac{2ydy}{p} = \frac{ydy.\,p}{2ydy} = \frac{1}{2}p$.

4. Die Formel für die Normale $\frac{y}{dx} . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Folglich ist das Quadrat der Normale $\frac{y^2}{dx^2}(dx^2 + dy^2)$, das ist, $y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}$, oder wenn man für dx^2 den gefundnen Werth setzt, $y^2 + y^2dy^2 : \frac{4y^2dy^2}{p^2}$, das ist,

 y^2+

$y^2 + \frac{p^2y^2dy^2}{4y^2dy^2} = y^2 + \frac{1}{4}p^2 = px + \frac{1}{4}p^2$. Folglich ist die Normale der Parabel $= \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)}$.

§. 23.

Aufgabe. Allgemeine Formeln für den Winkel zu finden, welchen die Curve oder ihre Tangente mit der Ordinate sowohl, als mit der Axe der Abscissen in jedem ihrer Punkte macht. Fig. 216.

In dem rechtwinklichten Triangel Mmr ist für dem Halbmesser = 1, rm : rM = 1 : tang rmM, folglich tang rmM $= \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$; und Mr : rm = 1 : tang rmM, folglich tang rMm $= \frac{rm}{Mr} = \frac{dy}{dx}$.

Setzt man nun die Tangente des Winkels, welchen die Curve oder ihre Tangente mit der Ordinate macht, oder tang rmM = m; und die Tangente des Winkels welchen die Curve oder ihre Tangente mit der Axe der Abscissen macht, oder tang rMm = n: so hat man die allgemeinen Formeln $m = \frac{dx}{dy}$, und $n = \frac{dy}{dx}$.

Zusatz. Setzt man für m oder n die Tangente irgend eines bestimmten Winkels: so hat man eine Gleichung in welcher man den Werth von $\frac{dx}{dy}$ oder $\frac{dy}{dx}$ aus der Function einer gegebenen Curve bestimmt, und man erhält alsdenn einen Werth für x, welcher anzeigt, ob und wo der angenommene Winkel bey solcher Curve statt findet. Z. E. man hätte für eine Hyperbel die Gleichung $y^2 = 2ax + ax^2$, und man wolte wissen, in welchem Punkte diese Hyperbel mit der Ordinate einen Winkel von 45° Grad. machte: so ist hier m = 1, folglich

1 =

$1 = \frac{dx}{dy}$. Differentiirt man nun die gegebene Gleichung, so erhält man $2ydy = 2adx + 4xdx = (2a + 4x)\,dx$, folglich $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2a + 4x} = \frac{y}{a + 2x}$. Demnach hat man $1 = \frac{y}{a + 2x}$, folglich $a + 2x = y$. Nun ist nach der gegebenen Gleichung $y = \surd(2ax + 2x^2)$. Folglich ist $a + 2x = \surd(2ax + 2x^2)$, und quadrirt $a^2 + 4ax + 4x^2 = 2ax + 2x^2$, folglich $a^2 + 2ax + 2x^2 = 0$, oder $x^2 + ax + \frac{1}{2}a^2 = 0$, folglich $x = -\frac{1}{2}a \mp \surd(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2) = \frac{1}{2}a \mp \surd -\frac{1}{4}a^2$. Da dieser Werth für x unmöglich ist: so siehet man, daß die gegebene Hyperbel mit der Ordinate nirgends einen Winkel von 45 Grad mache.

§. 24.

Aufgabe. Den Punkt zu finden, wo die Tangente einer Curve der Ordinate, oder der Axe der Abscissen parallel läuft. Fig. 205.

Da in diesem Falle die Winkel §. 23. Null sind: so setze man in den allgemeinen Formeln diese Winkel m und $n = 0$, bestimme $\frac{dx}{dy}$ aus der gegebenen Function, und setze im ersten Falle den Zähler, im zweyten den Nenner $= 0$.

Gesetzt man hätte für eine Curve die Gleichung $y^2 + x^2 = 3ax - 2a^2 + 2by - b^2$, (welche bey rechtwinklichten Coordinaten erhalten wird, wenn man VI. §. 24. den Durchmesser des Cirkels a nennt, den Anfang der Abscissen in A setzt, die Gleichung $y^2 = ax - x^2$ formirt, und VI. §. 24. Zus. 3. den Anfang der Abscissen in E Fig. 205. annimmt, so daß $AF = a$, $EF = b$ ist): so ist ihr Differential $2ydy + 2xdx = 3adx + 2bdy$,

folglich $(2y - 2b)\,dy = (3a - 2x)\,dx$, folglich $\frac{2y - 2b}{3a - 2x} = \frac{dx}{dy}$.

Soll nun die Tangente der Ordinate parallel werden: so setze man den Zähler des gefundnen Bruchs $2y - 2b = 0$, folglich $y = b$. Setzt man diesen Werth anstatt y in die gegebene Gleichung: so erhält man $b^2 + x^2 = 3ax - 2a^2 + 2b^2 - b^2$, das ist, $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$, folglich $x = \frac{3}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$, das ist, x entweder $= 2a$ oder $= a$. Dieser gefundne doppelte Werth für x lehret demnach, daß die Curve oder ihre Tangente der Ordinate parallel wird in den zwey Punkten A und B, welche zur Ordinate b, das ist, cA, KB, und zu den Abscissen a oder 2a, das ist Ec, oder EK haben, (wobey man sich in der Figur AF so groß als AB gedenken muß, weil $AF = a = AB$ in der Gleichung angenommen ist).

Soll nun die Curve, oder ihre Tangente der Axe der Abscissen parallel werden, das ist, will man die Punkte wissen, wo solches geschiehet: so setze man den Nenner des gefundnen Bruches $3a - 2x = 0$, folglich $x = \frac{3}{2}a$, und bringe diesen Werth anstatt x in die gegebene Gleichung: so erhält man $y^2 + \frac{9}{4}a^2 = \frac{9}{2}a^2 - 2a^2 + 2by - b^2$, das ist $y^2 - 2by + b^2 = \frac{1}{4}a^2$, folglich $y - b = \mp \frac{1}{2}a$, folglich $y = b \mp \frac{1}{2}a$. Demnach wird die Curve oder ihre Tangente der Axe der Abscissen parallel in den zwey Punkten e und d, welche zur Abscisse $\frac{3}{2}a$, das ist, Ea, und zu Ordinaten $b + \frac{1}{2}a$ und $b - \frac{1}{2}a$, das ist, ae und ad haben.

Zusatz. 1. Die durch beyde Operationen gefundnen Punkte c, M, d, e, nennt man die Grenzen der Abscissen und Ordinaten; weil jeder Abscisse zwischen c und M eine Ordinate zugehörig ist, außerdem aber nicht, indem, so bald man x entweder $a - q$ oder

2a +

2a + q ansetzt, die Ordinaten unmöglich werden; und weil keine Ordinate größer als ae, und kleiner als ad werden kann, indem, so bald man y entweder $b + \frac{1}{2}a + q$ oder $b - \frac{1}{2}a - q$ ansetzt, der Werth von x unmöglich wird. Demnach ist Ec die kleinste und EK die größte unter den Abscissen die wirkliche Ordinaten geben; ae die größte unter den Ordinaten, welche den concaven Theil, und ad die kleinste unter denen, welchen den convexen Theil der Peripherie treffen, auch sind die Ordinaten cA, KB, zugleich die kleinsten für den concaven, und die größten für den convexen Theil.

2. Hieraus erhellet, daß diese Methode nicht nur lehret, wo die Tangente der Ordinaten oder den Abscissen parallel wird, sondern auch zugleich die Grenzen der Abscissen und Ordinaten, und welche darunter die größten und kleinsten sind, bestimmt.

§. 25.

Aufgabe. Unter mehrern Größen, welche nach einem bestimmten Gesetze wachsen und abnehmen, soll man die größte und kleinste finden.

Da jede Function, welche Art von Größe sie auch angehen mag, als die Function der Ordinate einer krummen Linie, welche in einem Falle größer oder kleiner wird, als in jedem andern, wo man sagt, daß sie ein Größtes oder ein Kleinstes zulasse, angesehen werden kann: so ist offenbar, daß man nach der im vorhergehenden §. 24. entwickelten Methode das Größte und Kleinste für jede durch eine Function bestimmte Größe finden könne.

Z. E. Man soll eine gegebene Zahl a in zwey Theile dergestalt theilen, daß solche das möglich größte Product geben. Nennt man den einen Theil x, und den andern

 a — x,

$a - x$, so ist ihr Product $ax - x^2 = y$, folglich $adx - 2xdx = dy$, folglich $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - 2x}$. Da man hier den Zähler nicht $= 0$ setzen kann: so setze man den Nenner $a - 2x = 0$, folglich $a = 2x$, und $\frac{1}{2}a = x$. Demnach erhält man das größte Product, wenn man die gegebene Zahl in zwey gleiche Theile theilt.

Zusatz. Bey einem solchem Ausdruck, dergleichen im vorhergehenden Beyspiele $ax - x^2$ war, hat man nicht einmal nöthig, ihn erst einer veränderlichen Größe y gleich zu setzen, sondern braucht ihn nur gleich zu differentiiren, und seine Differential, oder, wenn solches ein Bruch, seinen Zähler oder seinen Nenner $= 0$ zu setzen, als $adx - 2xdx = 0$, folglich $\frac{1}{2}a = x$, wie vorher.

Z. E. Man soll eine gegebene Zahl a so theilen, daß eine Potenz des einen Theils, x^m, mit einer Potenz des andern Theils $(a - x)^n$ multiplicirt, das möglich größte Product $x^m (a - x)^n$ gebe. Demnach wäre $mx^{m-1}dx. (a - x)^n - nx^m (a - x)^{n-1}dx = 0$, folglich, wenn man mit $x^{m-1}dx (a - x)^{n-1}$ dividirt, $m (a - x) - nx = 0$, oder $ma - mx - nx = 0$, folglich $\frac{ma}{m + n} = x$. Gesetzt es sey $m = 2$, $n = 3$, so ist $x = \frac{2}{5}a$ der eine Theil, und daher $\frac{3}{5}a$ der andre.

§. 26.

Aufgabe. Eine Größe läßt ein Größtes, oder ein Kleinstes, oder beydes zu; man soll bestimmen, in welchem von diesen drey Fällen sich die Größe befinde.

In Fig. 205. siehet man, daß eine Größe auf zweyerley Art ein Größtes oder ein Kleinstes werden kann. Denn die Ordinate bM wächst bis sie die größte ae wird,

und

und nimmt von da an wieder ab; die Ordinate Hf wächst bis sie die größte KB wird, wo sie plötzlich stille stehet. Die Ordinate bg nimmt ab, bis sie die kleinste ad wird, und wächst von da an wieder; die Ordinate Hm nimmt ab, bis sie die kleinste KB wird, wo sie plötzlich stille stehet. Demnach ist KB bey solchem Stillstande zugleich ein Größtes für den convexen und ein Kleinstes für den concaven Theil der Peripherie.

Um daher obgedachte drey Fälle zu unterscheiden, hat man nur nöthig, wenn a den Werth von x im Fall des Größten oder Kleinsten anzeigt, in der gegebenen Function anstatt x das einemal $a + q$, das andremal $a - q$ zu setzen. Findet sich alsdenn der beyderseitige Werth reel und kleiner, oder größer als der Werth von $x = a$, so hat man im ersten Falle ein Größtes, im zweyten ein Kleinstes. Findet es sich aber, daß von dem beyderseitigen Werthe der eine reel, der andre nur eingebildet ist: so hat man ein Größtes und ein Kleinstes zugleich.

Anmerkung. Was bisher abgehandelt worden, mag hinreichend seyn, von dem Gebrauche der Differentiale, der sich noch viel weiter erstreckt, und überhaupt von der Differentialrechnung, die ersten Begriffe zu geben.

Zwey-

Zweytes Capitel.

Von der Integralrechnung.

I. Natur der Integrale.

§. 27.

Integriren, oder das Integral finden, heißt eine eine endliche Größe aus ihrem Differential ableiten, das ist, alle Differentiale, welche eine endliche Größe, bey ihrem Uebergange in einen gewissen Zustand, durchlaufen ist, summiren; daher auch der Buchstabe $\int$ das Zeichen des Integrals ist.

So heißt z. E. $\int dx = x$ die Summe aller dx, welche die Größe x ausmachen; oder das Integral von dx ist x, diejenige Größe, aus deren Differentiirung die gegebene zu integrirende Function dx geworden ist. Daher ist es ein sicheres Merkmal, daß man richtig integrirt habe, wenn man das gefundne Integral differentiirt, und man hieraus das gegebene Differential wieder erhält. So ist z. E. $\int (xdy + ydx) = xy$, indem $d(xy) = xdy + ydx$, dem gegebenen Differential.

Zusatz. Das Zeichen des Integrals gehet nicht auf die nächstfolgende Größe allein, sondern auf den ganzen folgenden Ausdruck, wenn solcher ein Product oder Quotient ist; da man denselben nur alsdenn in eine Parenthese einschließt, wenn er eine Summe oder Differenz, oder ein zusammengesetzter Factor ist. So zeigt z. E. $\int xdx \sqrt[4]{(a - x)}$ das Integral des ganzen Products, so wie $\int (xydz + xzdy + yzdx)$ das Integral der ganzen

Sum-

Summe, deren einzelne Glieder Producte veränderlicher Größen sind; oder ∫ (adx + bdy + cdz) die Integrale der einzelnen Glieder, welche nur einzelne veränderliche Größen enthalten. Im letztern Fall ist solches nur eine Abkürzung, da es eigentlich ∫adx + ∫bdy + ∫cdz heißen müßte. Die erste Bezeichnungsart macht es nothwendig, wenn man das Product zweyer Integrale andeuten will, daß solches durch das Multiplicationszeichen geschehe. Z. E. ∫Pdx. ∫Qdx, nicht aber ∫Pdx∫Qdx.

Anmerkung. Da alle Größen durch Wachsen und Abnehmen aus einem Zustande in den andern treten können; solches aber nicht auf einmal und sprungweise, sonnach dem Gesetze der Stetigkeit so geschiehet, daß sie vom Anfange bis zu Ende alle Zwischenzustände betreten, und §. 5. Zus. 5. von einem nächstfolgenden Zustande zum andern nächstfolgenden Zustande und so fort gelangen: so muß von diesem Uebergange, den man durch die Differentiale ausdrückt, und der bey jeder Größe eigenen Gesetzen unterworfen ist, ihr nachfolgender Zustand, und daher die Natur der Größe selbst abhangen. Demnach läßt sich aus der Art und Weise, wie eine Größe aus einem Zustande in den andern gelangt, rückwärts ein Schluß auf die Größe selbst machen; und dieser Schluß wird gemacht, wenn man aus dem Differential das Integral findet.

§. 28.

Die Differentialfunction, welche integrirt werden soll, und auf deren Beschaffenheit sich natürlicher Weise die Art der Operation beym Integriren gründen muß, ist entweder vollständig, oder unvollständig; entweder ganz oder gebrochen; entweder rational oder irrational; entweder monomisch, oder nicht monomisch; entweder von gemeinen Größen, oder

von Exponentialgrößen; entweder von einer oder von mehrern veränderlichen Größen.

1. **Vollständig** ist sie, wenn sie so ist, wie sie aus einer wirklichen Differentiirung entstanden; **unvollständig**, wenn der Ausdruck nicht das ganze Differential darstellt. So ist z. E. $xdy + ydx$, oder das Differential von xy; wie auch $\frac{xdy - ydx}{y^2}$, oder das Differential von $\frac{x}{y}$, vollständig; hingegen xdy, oder $xdy - ydx$ unvollständig.

2. **Gebrochen** oder **ganz** ist sie, je nachdem die veränderliche Größe auch im Nenner eines Bruchs vorkommt, oder nicht. Z. E. $\frac{cx^m dx}{a^2 - b^2}$ ist ganz, hingegen $\frac{cx^m dx}{(a^2 - b^2) x^n}$ und $\frac{cx^m dx}{a^2 - x^2}$ ist gebrochen, und zwar entweder so, daß die veränderliche Größe im Nenner als Factor, oder nicht als Factor vorkommt.

3. **Rational** oder **irrational**, je nachdem sich in ihr ein ganzer oder gebrochner Exponent befindet, welcher auf die veränderliche Größe gehet. So ist z. E. $bdx (a^2 + bx)^{-2}$ rational, hingegen $xdx (a - x)^{\frac{1}{4}}$ irrational.

4. Ist in der Function irgend eine Potenz einer zweytheiligen oder mehrtheiligen Größe, worunter die veränderliche Größe mit befindlich: so heißt die Function **binomisch**, oder **multinomisch**; sonst aber **monomisch**. So ist z. E. $3xdx (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ binomisch, hingegen $\frac{cx^m dx}{(a^2 - b^2) x^n}$ monomisch.

5. Ist

5. Ist in der Function ein veränderlicher Exponent, als $a^x dx$, oder ist sie auch nur das Differential eines veränderlichen Exponenten, als $\frac{dy}{y}$, welches man erkennet, wenn der Zähler des Bruchs das genaue Differential der veränderlichen Größe im Nenner enthält: so ist sie eine Function für Exponentialgrößen; sonst aber wie in allen vorhergehenden Beyspielen für gemeine Größen, die nicht zu den Exponentialgrößen gehören.

6. Endlich enthält xdx nur eine, aber xdy, zwey veränderliche Größen.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß nach Verschiedenheit der vorgelegten Differential-Function auch das Geschäfte des Integrirens verschieden seyn müsse; und bey der einen genauer und leichter, bey der andern nicht so genau oder doch mißlicher von statten gehen werde.

Anmerkung. Auch gehört noch hieher der Unterschied, daß das gegebene Differential entweder von der ersten oder von einer höhern Ordnung; entweder eine Differential-Größe, oder eine Differential-Gleichung ist.

§. 29.

Das Integriren einer gegebenen Differentialfunction geschiehet entweder mittelbar, erst nach vorhergegangener Vorbereitung und Transformation der vorgelegten Function, oder unmittelbar ohne solche Vorbereitung; entweder genau, oder nur durch Approximation; entweder mit Hülfe der Logarithmen, der Binomialformel, der unendlichen Reihen, oder ohne solche Hülfe.

Zusatz. Man kann zwar jede gegebene Function differentiiren; aber nicht jede Differentialfunction läßt sich integriren; entweder, weil sie unvollständig, und wohl gar aus keiner wirklichen Differentiirung entstanden ist, oder weil man bisher noch keine Methode ihrer Integration gefunden hat; da es so gar deren viele giebt, bey welchen man nur wenige oder gar keine Hoffnung hat, jemals zu ihrer Integration zu gelangen.

§. 30.

Die Fundamentalregel des Integrirens, welche man jedesmal versuchen muß, ehe man die speciellen Methoden zu Hülfe nimmt, ist der umgekehrte Weg des Differentiirens, wornach man das entgegengesetzte von dem thut, was man beym Differentiiren gethan hat, und wodurch man die differentiirte Grösse, bis auf die beym Differentiiren weggefallnen beständigen Größen, welche man durch den Buchstaben C anzeigt, nothwendig wieder erhält.

So ist z. E. offenbar $\int dx = x + C$ und $\int \frac{dy}{y} = \log. y$.

Zusatz. 1. Diese Fundamentalregel läßt sich mit Hülfe einiger Kunstgriffe in sehr vielen Fällen, die oft sehr verwickelt scheinen, mit Erfolg anwenden; reicht aber bey weiten nicht zu allen, auch nicht immer zur Entdeckung der versteckten beständigen Größen hin. In solchen speciellen Fällen muß man denn besondre Methoden kennen und anzuwenden wissen. Ja, da auch oft das Integral nicht genau, oder wohl gar nicht zu finden ist: so muß man aus sichern Kennzeichen zu bestimmen wissen, ob und in wie fern jedesmal ein Integral statt finden

finden könne oder nicht, und wie man sich dabey zu verhalten habe.

2. Aus dem also gefundnen Integral lassen sich die endlichen Größen nicht nur nach ihren veränderlichen Theilen ableiten, sondern auch ihre beständigen Theile bestimmen; wovon beym Gebrauch der Integrale das mehrere. Zuvor ist es nicht nöthig auf die beständigen Größen, die sich nur aus den besondern Umständen der Sache ergeben, acht zu haben; oder wenigstens hinreichend, sie nur allgemein durch den Buchstaben C anzudeuten.

Anmerkung. Der weite Umfang der Integralrechnung, und die vielen und großen Schwierigkeiten, womit sie verbunden ist, machen es nothwendig, daß man sich in den ersten Elementen nur auf die allgemeine Methode der Fundamentalregel einschränke, und nur auf einige verwickeltere Fälle ausbreite, welche sich der Fundamentalregel noch auf irgend eine Art unterwerfen lassen; um so mehr da dieses schon hinreichend ist, von dem vortheilhaften Gebrauche, der sich von den Integralen machen läßt, Begriffe zu geben. Auch wird von keinen Differentialgleichungen, sondern nur von Differentialgrößen und zwar nur von der ersten Ordnung im Folgenden die Rede seyn.

II. Integrirung gemeiner Differentiale.

§. 31.

Die Fundamentalregel der Integrirung gemeiner Differentiale erfodert, daß man die gegebene Function einer einzelnen veränderlichen Größe, die keine Exponentialgröße ist, nachdem man in derselben den Exponenten der veränderlichen Größe um Eins erhöhet hat,

mit dem Producte des erhöheten Exponenten in das Differential der veränderlichen Größe dividire.

Denn dies ist gerade das entgegengesetzte von dem, was man beym Differentiiren einer veränderlichen Größe gethan hat, wodurch man nothwendig solche Größe selbst wieder erhält, auf eben die Art, wie jede Größe unverändert bleibt, wenn man sie mit einer Zahl multiplicirt, und das daher entstehende Product mit derselben Zahl wieder dividirt.

Z. E. So wie $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, so ist auch $\int mx^{m-1}dx = \frac{mx^{m-1+1}dx}{(m-1+1)dx} = \frac{mx^m dx}{m\,dx} = x^m$.

Zusatz. 1. Daß $\int dx = x$, und $\int adx = ax$ sey, siehet man beym ersten Blick; indeß lassen sich auch dergleichen Fälle nach der Fundamentalregel behandeln. Denn da $dx = x^0 dx$, so ist $\int x^0 dx = \frac{x^{0+1}dx}{(0+1)dx} = \frac{xdx}{dx} = x$.

2. Auch für irrationale Functionen paßt die Regel.

Z. E. $\int a\sqrt{x}\,dx = \int ax^{\frac{1}{2}}dx = \frac{ax^{\frac{1}{2}+1}dx}{(\frac{1}{2}+1)dx} = \frac{ax^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{3}{2}dx} = \frac{2a\sqrt{x^3}}{3}$.

3. Aus dem Folgenden wird erhellen, daß die Regel noch für mehrere Fälle passe. Nur ein Fall ist stets ausgenommen, wo der Exponent der veränderlichen Größe die negative Einheit ist. Z. E. $ax^{-1}dx$. Denn in solchem Falle ist $\int ax^{-1}dx = \frac{ax^{-1+1}dx}{(-1+1)dx} = \frac{ax^0}{0} = \frac{a}{0} = \infty$. Aus dem Folgenden wird erhellen, daß dergleichen

gleichen Function $ax^{-1}dx$ oder $\frac{adx}{x}$ ein logarithmisches Differential, nämlich $d(alx) = d(lx^a)$ sey, und wie man sich dabey zu verhalten habe.

4. Aus eben dem Grunde sind auch die Functionen ausgenommen, worinn obgedachter Exponent selbst eine veränderliche Größe ist, wovon auch im Folgenden das mehrere.

§. 32.

Aufgabe. Ganze Differentialfunctionen, worinn nur eine monomische veränderliche Größe ist, zu integriren.

Für diesen Fall wendet man ohne weitere Umstände die Fundamentalregel §. 31. unmittelbar an; nur darf der Exponent der veränderlichen Größe weder die negative Einheit, noch auch selbst eine veränderliche Größe seyn, §. 31. Zus. 3. 4.

So ist z. E. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; und $\int \frac{ax^n dx}{c} = \frac{ax^{n+1}}{c(n+1)}$; und $\int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{nx^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$; und $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} = x^3$; und $\int dx \sqrt{x} = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

§. 33.

Aufgabe. Gebrochene Differentialfunctionen, worinn nur eine monomische veränderliche Größe ist, zu integriren.

Man bringe zuvor die veränderliche Größe mittelst des negativ gesetzten Exponenten aus dem Nenner in den

Zähler, und integrire alsdenn nach der Fundamentalregel.

So ist z. E. $\int \frac{cx^m dx}{(a^2 - b^2)\, x^n} = \int \frac{cx^{m-n} dx}{a^2 - b^2} = \frac{cx^{m-n+1}}{(a^2 - b^2)(m - n + 1)}$; und $\int \frac{bdx}{ax^{m-n}} = \int \frac{bx^{n-m} dx}{a} = \frac{bx^{n-m+1}}{a(n - m + 1)}$; und $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$; und $\int \frac{dx \sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} = \int \frac{x^{\frac{1}{3}} . x^{-\frac{1}{2}} dx}{2} = \int \frac{x^{\frac{2}{6}} . x^{-\frac{3}{6}} dx}{2} = \int \frac{x^{-\frac{1}{6}} dx}{2} = \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{2(1 - \frac{1}{6})} = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{10}{6}} = \frac{3}{5} \sqrt[6]{x^5}$; und überhaupt $\int \frac{dx \sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \int x^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} dx = \int x^{\frac{n-m}{mn}} dx = \frac{x^{\frac{n-m}{mn}+1}}{\frac{n-m}{mn}+1}$

$$= \frac{mnx^{\frac{n-m+mn}{mn}}}{n - m + mn}.$$

Zusatz. Hievon ist der Fall ausgenommen, wenn der Zähler der Function ein genaues Differential des Nenners enthält; denn alsdenn ist sie ein logarithmisches Differential. So ist z. E. $\int \frac{dx}{x} = \log. x$. Der allgemeine Ausdruck für dergleichen Functionen ist $\frac{bmx^{m-1} dx}{c(a + x^m)}$; indem $d(a + x^m) = mx^{m-1} dx$ im Zähler der Function angetroffen wird.

§. 34.

Aufgabe. Zusammengesetzte Differentialfunctionen zu integriren, wenn die Glieder nur einzelne monomische veränderliche Größen enthalten.

In

In diesem Falle wird jedes einzelne Glied für sich nach der Fundamentalregel integrirt. Z. E.

1. $\int (2ax^2dx - bz^{-3}dz + \frac{2}{3}cy^{\frac{2}{3}}dy) = \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}\frac{b}{z^2} + \frac{2}{5}cy^{\frac{5}{3}}$.

2. $\int (ax^m dx - bx^{n-2}dx + cy^{m-n}dy) = \frac{ax^{m+1}}{m+1} - \frac{bx^{n-1}}{n-1} + \frac{cy^{m-n+1}}{m-n+1}$.

3. $\int \frac{ax^m dx - bx^n dx}{(a^2+b^2)x} = \int \frac{ax^{m-1}dx}{a^2+b^2} - \int \frac{bx^{n-1}dx}{a^2+b^2} = \frac{ax^m}{m(a^2+b^2)} - \frac{bx^n}{n(a^2+b^2)}$.

4. $\int \frac{ax^2dx - bdx}{(a-b)x^2} + \int \frac{cy^2dy - ey^{-1}dy}{(a+b)y^2} = \int \left(\frac{adx}{a-b} - \frac{bx^{-2}dx}{a-b} + \frac{cdy}{a+b} - \frac{ey^{-3}dy}{a+b}\right) = \frac{ax}{a-b} + \frac{bx^{-1}}{a-b} + \frac{cy}{a+b} - \frac{ey^{-2}}{2(a+b)} = \frac{ax}{a-b} + \frac{b}{ax-bx} + \frac{cy}{a+b} - \frac{e}{2y^2(a+b)}$.

§. 35.

Aufgabe. Zusammengesetzte Differentialfunctionen zu integriren, wenn die Glieder die Producte verschiedener monomischer veränderlicher Größen enthalten.

I. Man integrire jedes einzelne Glied, als ob die übrigen veränderlichen Größen, in welche das Differential der einen multiplicirt ist, beständige Größen wären. Erhält man aus allen Gliedern einerley Integral: so ist

solches das gesuchte. Erhält man hingegen nicht einerley Integral aus allen Gliedern, oder sind nicht so viel Glieder als veränderliche Größen in jedem Gliede: so ist das Differential entweder nicht vollständig, oder läßt sich nach dieser Regel nicht integriren.

So ist z. E. $\int(xdy + ydx) = xy$; und $\int(xy^2dy + y^3dx) = xy^3$; und $\int(x^2y^2z^3dx + x^2yz^3dy + x^2y^2z^2dz) = x^2y^2z^2$. Hingegen $\int xdy$, oder $\int x^2ydx$, ist unvollständig.

II. Oder allgemein: Man nehme diejenigen Glieder, worinn das Differential einer veränderlichen Größe vorkommt, zusammen, und integrire solche, als ob nur diese einzige veränderliche Größe vorhanden wäre. Das also gefundne Integral differentiire man, und subtrahire das Resultat von der gegebenen Function. Bleibt alsdenn kein Rest: so hat man das gesuchte Integral gefunden; bleibt aber ein Rest: so verfahre man damit, wie zuvor, und füge das neue Integral dem vorhergehenden bey. Diese Operation wiederhole man bis kein Rest mehr bleibt, welches geschehen wird, wenn die gegebene Function integrabel ist.

Z. E. Es soll $3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$ integrirt werden. Man nehme die Glieder, worinn dx vorkommt, nämlich $3x^2ydx + y^5dx$, und integrire sie, als ob nur x eine veränderliche, y aber eine beständige Größe wäre: so erhält man $x^3y + y^5x$, wovon das Differential $x^3dy + 3yx^2dx + y^5dx + 5xy^4dy$, von der gegebenen Function subtrahirt, keinen Rest läßt. Demnach ist $\int(3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx) = x^3y + y^5x$.

Eben so, wenn man $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$, integriren solte, integrire man zuerst alle

alle Glieder, worinn dx befindlich, nämlich $3x^2ydx$ + $2xzdx + xdx$, als ob nur x veränderlich wäre: so erhält man $x^3y + x^2z + \frac{1}{2}x^2$, wovon das Differential $3x^2ydx + x^3dy + 2xzdx + x^2dz + xdx$, von der gegebenen Function subtrahirt, zum Reste y^2dy läßt. Von diesem Reste wird das Integral $\frac{1}{3}y^3$ zu dem bereits gefundnen addirt. Demnach ist $\int (x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy) = x^3y + x^2z + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$.

Zusatz. 1. Will man zum voraus wissen, ob dergleichen Differentiale, wenn sie nur zwey veränderliche Größen enthalten, vollständig, und daher integrabel sind: so differentiire man den Coefficienten von dx, als ob nur y veränderlich wäre, und den Coëfficienten von dy als ob nur x veränderlich wäre. Dividirt man die also gefundnen Differentiale, das erste mit dy, das zweyte mit dx, und man findet beyde Quotienten gleich: so ist das gegebene Differential vollständig und integrabel. Z. E. Es soll $\frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$ integrirt werden: so ist $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$, wenn man beym ersten nur y, beym zweyten nur x als veränderlich annimmt. Denn alsdenn erhält man $\frac{y^2dy}{dy} = \frac{y^2dx}{dx}$. Daher ist die gegebene Differentialfunction vollständig, und giebt zum Integral $\frac{1}{3}y^3x$. Hingegen ist $xydx + 2xdy$ nicht vollständig und daher auch nicht integrabel, weil $\frac{d(xy)}{dy}$ nicht dem $\frac{d(2x)}{dx}$ gleich ist.

2. Bezeichnet man dergleichen Differential von zwey veränderlichen Größen mit $Adx + Bdy$: so ist dasselbe vollständig, wenn auf die vorher beschriebene Art

$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$ ist. Ein Differential von drey veränderlichen Größen, $Adx + Bdy + Cdz$, ist auf eben die Art vollständig, wenn $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, und $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, und $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$.

§. 36.

Aufgabe. Binomische Differentialfunctionen zu integriren.

I. Wenn der Coëfficient ein genaues Differential, der veränderlichen Größe im Binomium, enthält: so kann man sogleich nach der Fundamentalregel integriren. Z. E.

1. Es sey $(abdx + 2axdx)(bx + x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren: so enthält der Coefficient $a(bdx + 2xdx)$ das genaue Differential von $bx + x^2$, weil $d(bx + x^2) = bdx + 2xdx$. Demnach ist $\int a(bx + x^2)^{\frac{1}{2}}(bdx + 2xdx) = \frac{2}{3}a(bx + x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}a(bx + x^2)\sqrt{(bx + x^2)}$.

2. Es sey $3xdx(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren: so enthält der Coëfficient 3. xdx das genaue Differential von $a^2 + x^2$, welches 2. xdx ist, wobey auf den Unterschied der beständigen Größen 3 und 2 nicht zu achten ist. Demnach ist $\int (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}. 3xdx = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} 3xdx}{\frac{3}{2}. 2xdx} = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} 2. 3 xdx}{3. 2. xdx} = (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} = (a^2 + x^2)\sqrt{(a^2 + x^2)}$, oder $= \sqrt{(a^2 + x^2)^3}$.

Zusatz. Diese Regel erstreckt sich auch auf gebrochene, auch auf trinomische Functionen, auch auf solche, die mehr als eine veränderliche Größe enthalten. So ist z. E.

z. E. $\int \frac{bdx}{(a^2+bx)^2} = \int bdx\,(a^2+bx)^{-2} = \frac{(a^2+bx)^{-1}}{-1}$
$= \frac{-1}{a^2+bx}$; und $\int (adx+dy)(ax+y)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(ax+y)^{\frac{3}{2}}$
$= \frac{2}{3}\sqrt{(ax+y)^3}$; und $\int (xdy + ydx + 2ydy)$
$(xy+y^2+a^2)^{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n}(xy+y^2+a^2)^{\frac{m+n}{n}}$;
und $\int \frac{2x^2ydy + 2y^2xdx + 2xdx + 2ydy}{\sqrt[3]{(x^2y^2+x^2+y^2)^2}} =$
$\int (2x^2ydy + 2y^2xdx + 2xdx + 2ydy)(x^2y^2+x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}}$
$= \frac{1}{3}(x^2y^2+x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$.

II. Wenn der Coëfficient nicht das genaue Differential der veränderlichen Größe im Binomium enthält: so kann man durch Potenziren, Extrahiren, Multipliciren oder Dividiren, und Transformiren die gegebene Function zum Integriren zubereiten.

1. Es sey $(axdx + bx^2dx)(ax + x^2)$ zu integriren: so erhebe man $ax + x^2$ in die zweyte Potenz $a^2x^2 + 2ax^3 + x^4$, und multiplicire solche mit dem Coëfficienten $axdx + bx^2dx$: so erhält man $a^3x^3dx + 2a^2x^4dx + ax^5dx + a^2bx^4dx + 2abx^5dx + bx^6dx$, und durch Integrirung der einzelnen Glieder das gesamte Integral $\frac{1}{4}a^3x^4 + \frac{2}{5}a^2x^5 + \frac{1}{6}ax^6 + \frac{1}{5}a^2bx^5 + \frac{2}{6}abx^6 + \frac{1}{7}bx^7$.

2. Es sey $3dx\,(a^2 + 2ax + x^2)^{-2}$ zu integriren, wo das Trinomium eine vollständige Potenz enthält. In solchem Falle extrahire man daraus die Wurzel, und vermehre den Exponenten des Trinomiums um so viel Grade. Als hier ist die Quadratwurzel $a + x$, und daher $\int 3dx\,(a^2 + 2ax + x^2)^{-2} = \int 3dx\,(a+x)^{-4}$, wo so gar der Coëfficient nunmehr das genaue Differential des Binomiums enthält. Demnach ist $\int 3dx\,(a+x)^{-4} = \frac{3dx\,(a+x)^{-3}}{-3dx} = \frac{-1}{(a+x)^3}$.

3. Es sey $(a^2dx + 2x^2dx)\,(a^2x^4 + x^6)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren. Man multiplicire den einen Factor mit einer Potenz von x, und dividire den andern Factor mit eben dieser Potenz, wodurch die Function nicht geändert wird; als hier werde der Coëfficient mit x^1, multiplicirt, und das Binomium mit $x^{\frac{2}{2}} = x^1$ dividirt, daher $\int(a^2dx + 2x^2dx)\,(a^2x^4 + x^6)^{\frac{1}{2}} = \int(a^2xdx + 2x^3dx)\,(a^2x^2 + x^4)^{\frac{1}{2}}$, wo nunmehr der Coëfficient das genaue Differential des binomischen Factors enthält. Demnach ist das Integral $\frac{3}{2}\,(a^2x^2 + x^4)^{\frac{3}{2}}$.

Auf eben die Art ist $\int(3ax^3dx + 4x^4dx)\,(ax + x^2)^{\frac{1}{2}} = \int(3ax^2dx + 4x^3dx)\,(ax^3 + x^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,(ax^3 + x^4)^{\frac{3}{2}}$; und $\int dx\,(a^2x^2 + x^4)^{\frac{1}{2}} = \int xdx\,(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\,(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}$.

4. Es sey $xdx\,\sqrt[4]{(a - x)}$ zu integriren. Man setze $\sqrt[4]{(a-x)} = z$, folglich $a - x = z^4$, folglich $a - z^4 = x$, folglich $-4z^3dz = dx$. Demnach ist $xdx = -4az^3dz + 4z^7dz$, und $xdx\sqrt[4]{(a-x)} = -4z^4dz + 4z^8dz$. Folglich ist $\int xdx\,\sqrt[4]{(a-x)} = -\frac{4}{5}z^5 + \frac{4}{9}z^9$. Nun ist $(a - x)^{\frac{1}{4}} = z$, und daher $(a - x)^{\frac{5}{4}} = z^5$, und $(a - x)^{\frac{9}{4}} = z^9$. Folglich ist $\int xdx\,\sqrt[4]{(a - x)} = -\frac{4}{5}\,(a - x)^{\frac{5}{4}} + \frac{4}{9}\,(a - x)^{\frac{9}{4}} = -\frac{4}{5}\sqrt[4]{(a - x)^5} + \frac{4}{9}\sqrt[4]{(a - x)^9}$.

Auf eben die Art ist, wenn man $(a - x)^{-\frac{1}{4}} = z^{-1}$, folglich $(a - x)^{\frac{1}{4}} = z$, und $a - x = z^4$ setzt, $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(a - x)}} = \int xdx\,(a - x)^{-\frac{1}{4}} = \int(-4az^2dz + 4z^6dz) = -\frac{4}{3}az^3 + \frac{4}{7}z^7 = -\frac{4}{3}\,(a - x)^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{7}\,(a - x)^{\frac{7}{4}}$.

Auf eben die Art ist, wenn man $(a + x)^{\frac{3}{2}} = z^{\frac{3}{2}}$, folglich $a + x = z$ setzt, $\int x dx (a + x)^{\frac{3}{2}} = \int z^{\frac{5}{2}} dz - a z^{\frac{3}{2}} dz = \frac{2}{7} z^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5} a z^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{7}(a + x)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5} a (a + x)^{\frac{5}{2}}$.

5. Es sey $b dx \sqrt{(a x^2 + x^3)}$ zu integriren. Man multiplicire den Coëfficienten mit x, und dividire den andern Factor mit $x^{\frac{2}{2}} = x$: so ist $b dx \sqrt{(a x^2 + x^3)} = b x dx \sqrt{(a + x)}$. Setze man nun $\sqrt{(a + x)} = z^{\frac{1}{2}}$, folglich $a + x = z$, und $x = z - a$: so ist $\int b dx \sqrt{(a x^2 + x^3)} = \int (b z dz - a b dz) z^{\frac{1}{2}} = \int (b z^{\frac{3}{2}} dz - a b z^{\frac{1}{2}} dz) = \frac{2}{5} b z^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} a b z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} b (a + x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} a b (a + x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} b \sqrt{(a + x)^5} - \frac{2}{3} a b \sqrt{(a + x)^3}$.

III. Integrirung der Exponential-Differentiale.

§. 37.

Aufgabe. Ein logarithmisches Differential unmittelbar zu integriren.

Enthält der Zähler des gegebenen Differentials das genaue Differential des Nenners: so ist der Logarithmus des Nenners, mit den etwa vorhandenen beständigen Größen multiplicirt, das gesuchte Integral, §. 18.

So ist z. E. $\int \frac{dy}{y} = \log. y$; und $\int \frac{a dx}{x} = a \log. x = \log. x^a$; und $\int \frac{a dx}{b x} = \frac{a}{b} \log. x = \log. \sqrt[b]{x^a}$; und $\int \frac{a x dx}{b x^2} = \int \frac{a dx}{b x} = \frac{a}{b} \log. x = \log. \sqrt[b]{x^a}$; und $\int \frac{2 x dx}{a^2 + x^2} = \log. (a^2 + x^2)$; und $\int \frac{12 x^2 dx}{a^3 + x^3} = \int \frac{4 . 3 x^2 dx}{a^3 + x^3} =$

4 log.

$4 \log. (a^3 + x^3) = \log. (a^3 + x^3)^4$; und $\int \frac{mx^{n-1}dx}{a^n + x^n} =$

$\int \frac{\frac{m}{n} nx^{n-1}dx}{a^n + x^n} = \frac{m}{n} \log. (a^n + x^n) = \log \sqrt[n]{(\log. a^n + x^n)^m}$;

und $\int \frac{adx - 2xdx}{ax - x^2} = \log. (ax - x^2)$.

§. 38.

Aufgabe. Ein logarithmisches Differential durch Hülfe der Substitution zu integriren.

Ist in dem gegebenen Differential ein Factor der Logarithmus einer veränderlichen Größe: so setze man denselben einer veränderlichen Größe gleich, und bringe diesen Werth in die gegebene Function.

1. Es sey $\frac{dx}{x \log x}$ zu integriren. Man setze $\log. x = y$, folglich $\frac{dx}{x} = dy$: so ist $\int \frac{dx}{x \log. x} = \int \frac{dy}{y} = \log. y = \log. (\log. x)$.

2. Es sey $m (\log. x)^{m-1} \frac{dx}{x}$ zu integriren. Man setze $\log. x = y$, folglich $\frac{dx}{x} = dy$: so ist $\int m (\log. x)^{m-1} \frac{dx}{x} = \int my^{m-1} dy = y^m = (\log. x)^m$.

3. Es sey $m (\log. \log. x)^{m-1} \frac{dx}{xlx}$ zu integriren. Man setze $\log. x = y$, folglich $\frac{dx}{x} = dy$, und $\log. (\log. x) = \log. y$: so ist $\int m. (\log. \log. x)^{m-1} \frac{dx}{x \log. x} = m (\log. y)^{m-1} \frac{dy}{y} = (\log. y)^m = (\log. \log. x)^m$.

4. Es sey $nm(\log. x^m)^{n-1}\frac{dx}{x}$ zu integriren. Man setze $x^m = y$, folglich $mx^{m-1}dx = dy$, und $dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}$, und $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{x. mx^{m-1}} = \frac{dy}{mx^m} = \frac{dy}{my}$: so ist $\int nm(\log. x^m)^{n-1}\frac{dx}{x} = \int nm(\log. y)^{n-1}\frac{dy}{my} = \int n(\log. y)^{n-1}\frac{dy}{y} = (\log. y)^n = (\log. x^m)^n$, wie num. 2.

§. 39.

Aufgabe. Ein Differential, worinn eine veränderliche Größe als Exponent vorkommt, zu integriren.

Da §. 19. das Differential einer Exponentialgröße aus dem Producte der Größe selbst in das Differential ihres Logarithmus bestehet: so findet man ihr Integral, wenn man das gegebene Differential durch das Differential des Logarithmus der Exponentialgröße dividirt.

So ist z. E. $\int a^x dx la = \frac{a^x dx la}{dx la} = a^x$; und $\int a^x dx = \frac{a^x dx}{dx la} = \frac{a^x}{la}$; und $\int \frac{a^x dx}{\log. a} = \frac{a^x dx}{\log. a. dx \log. a} = \frac{a^x}{(\log. a)^2}$; und $\int \frac{a^x dx}{(\log. a)^2} = \frac{a^x dx}{(\log. a)^2. dx \log. a} = \frac{a^x}{(\log. a)^3}$; und überhaupt $\int \frac{a^x dx}{(\log. a)^n} = \frac{a^x}{(\log. a)^{n+1}}$.

Anmerkung. Die zusammengesetztern Fälle bleiben in den ersten Elementen noch ausgesetzt.

IV. Gebrauch der Integrale.

§. 40.

Aufgabe. Die Gleichung für eine Curve aus der Formel für ihre Subtangente oder Subnormale zu finden.

Man setze die gegebene specielle Formel §. 22. der allgemeinen Formel §. 21. gleich, reducire die Gleichung nach den Regeln der Algebra, und integrire beyde Glieder.

1. Es sey die Subtangente einer Curve $= \frac{2y^2}{a}$: so ist §. 21. $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a}$, folglich $aydx = 2y^2dy$; oder $adx = 2ydy$; folglich integrirt, $ax = y^2$, die Gleichung für die Parabel, deren Parameter a.

2. Es sey die Subtangente einer Curve $= 2x$: so ist §. 21. $\frac{ydx}{dy} = 2x$, folglich $ydx = 2xdy$, folglich $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$. Da dieses ein logarithmisches Differential ist, so bringe man die Subtangente der logarithmischen Linie $= a$, in die Gleichung, und man erhält $\frac{dx}{2x} = \frac{ady}{y}$, folglich $\frac{dx}{2ax} = \frac{dy}{y}$, und integrirt, $\log. y = \frac{1}{2} \log. ax = \log. (ax)^{\frac{1}{2}} = \log. \sqrt{ax}$, folglich $y = \sqrt{ax}$, folglich $y^2 = ax$, die Gleichung für die Parabel.

3. Es sey die Subnormale einer Curve $= a$: so ist §. 21. $\frac{ydy}{dx} = a$, folglich $ydy = adx$, und integrirt, $\frac{y^2}{2} = ax$, folglich $y^2 = 2ax$, die Gleichung für die Parabel, deren Parameter 2a.

4. Es sey die Subnormale einer Curve = $\frac{ap - 2px}{2a}$: so ist §. 21. $\frac{ydy}{dx} = \frac{ap - 2px}{2a}$, folglich $2aydy = apdx - 2pxdx$, und integrirt, $ay^2 = apx - px^2$, folglich $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, die Gleichung für die Ellipse, deren Parameter p, und große Axe a.

§. 41.

Aufgabe. Eine ebene Figur SAN zu quadriren. Fig. 216.

1. Man ziehe zwey Ordinaten PM, pm, unendlich nahe, und denke sich die ganze Figur aus solchen kleinen Schnitten, wie PpmM, welches das Differential von APM, oder von CPMD ist, zusammengesetzt.

2. Man suche einen Ausdruck für solches Differential PpmM, als eine allgemeine Formel für das Differential einer jeden ebenen Figur. Nämlich da $AP = x$, $PM = y$, und daher $pm = y + dy$, auch $Pp = dx$ ist: so ist das kleine Trapez PpmM = $\frac{y + y + dy}{2} . dx = ydx + \frac{dy . dx}{2}$. Nun verschwindet hier $\frac{dydx}{2}$ gegen ydx. Folglich ist die allgemeine Formel für das Differential einer jeden ebenen Figur ydx.

3. Ist nun eine Gleichung für eine bestimmte Curve gegeben: so suche man daraus den Werth von y oder von dx, und bringe solchen in die allgemeine Formel num. 2. anstatt y oder anstatt dx, und integrire alsdenn dieselbe.

4. Da das gefundne Integral noch unbestimmt ist, und so wohl die Fläche APM, als auch die Fläche CPMD vorstellen kann; so füge man solchem eine beständige Größe C bey, welche bestimmt, von welchem Punkte A oder C

u. s.

u. s. w. die zu quadrirende Fläche ausgehen soll. Denn nimmt man den Punkt A für den Anfang an: so ist $x=0$, und alsdenn das gefundne Integral $= 0$; aus welcher Gleichung man den Werth für C erhält. Nimmt man den Punkt C für den Anfang an, welcher vom Scheitel um $AC = b$ entfernt ist: so wird $x = b$, und der unbestimmte Raum CPMD, für welchen man das Integral gefunden hat, verschwindet. Setzt man daher in dem gefundnen Integral $x = b$: so wird solches $= 0$, aus welcher Gleichung man abermals den Werth für C erhält.

Es sey z. E. die Gleichung für die Parabel $y^2 = px$ gegeben: so ist $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$. Setzt man diesen Werth in die allgemeine Formel ydx num. 2. anstatt y: so erhält man $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, und integrirt, $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Nimmt man nun A für den Anfang an: so ist APM $= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Setzt man hier $x = 0$, so verschwindet APM, so daß $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} . 0 + C = 0$, folglich $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} . 0 = 0$ wird; woraus erhellet, daß für APM keine Constante, oder beständige Größe, hinzuzufügen ist. Nimmt man hingegen C für den Anfang an, so daß $AC = x = b$ sey: so ist alsdenn $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + C = CPMD = 0$, folglich $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}}$; woraus erhellet, daß dieser Werth für die Constante noch hinzuzufügen ist. Demnach ist $CPMD = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$.

Zusatz. 1. Da APM $= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} . \frac{2}{3} x$, und $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$ ist: so ist APM $= \frac{2}{3} xy = \frac{2}{3}$ AP. PM. $= \frac{2}{3}$ BP.

2. Da CPMD $= \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$ ist: so ist auf eben die Art CPMD $= \frac{2}{3}$ AP. PM $- \frac{2}{3}$ AC. CD $= \frac{2}{3}$ BP $- \frac{2}{3}$ EC.

§. 42.

§. 42.

Aufgabe. Die Gleichung für eine Curve aus der Formel für ihren Flächen-Inhalt zu finden.

Man differentiire die gegebene specielle Formel und setze ihr Differential der allgemeinen Formel des Flächendifferentials ydx §. 41. num. 2. gleich, reducire solche Gleichung gehörig, und integrire ihre beyden Glieder.

Es sey z. E. ein Flächen-Inhalt $\frac{2}{3}xy$ gegeben: so ist $\frac{2}{3}xdy + \frac{2}{3}ydx = ydx$, folglich $\frac{2}{3}xdy = \frac{1}{3}ydx$, oder $2xdy = ydx$, folglich $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$. Setzt man die Subtangente der Logistik $= a$: so erhält man $\frac{ady}{y} = \frac{dx}{2x}$ oder $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2ax}$, und integrirt, $\log. y = \frac{1}{2}\log. ax = \log. ax^{\frac{1}{2}} = \log. \sqrt{ax}$, folglich $y = \sqrt{ax}$, und $y^2 = ax$, die Gleichung für die Parabel.

§. 43.

Aufgabe. Eine krumme Linie AMS zu rectificiren. Fig. 216.

Man nehme einen unendlich kleinen Theil Mm, oder das Differential des Bogen AM, oder DM, und ziehe die zugehörigen Ordinaten MP, mp, auch Mr der Pp parallel: so ist $Mr = dx$, $mr = dy$, folglich $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, die allgemeine Formel für das Differential eines Bogens. Sucht man nun aus einer gegebenen Gleichung den Werth für dx oder dy, und bringt solchen in die allgemeine Formel: so giebt das Integral den Bogen AM oder DM in einer geraden Linie, wozu man wie §. 41. noch die Constante bestimmen muß.

Es sey z. E. aus dem allgemeinen Parabolischen Geschlechte $y^{m+n} = a^m x^n$, eine Parabel, deren Gleichung $y^{1+2} = a^1 x^2$, das ist, $y^3 = ax^2$, zu rectificiren: so

ist $\frac{y^3}{a} = x^2$, folglich $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = x$, und differentiirt, $\frac{9}{4}\frac{ydy^2}{a} = dx$. Demnach ist die allgemeine Formel für das Differential des Bogens, $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{9ydy^2}{4a}\right)}$ $= dy\sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)} = dy\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$, wovon das Integral $= \frac{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4a}} + C = \frac{8}{27}a\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C$.

Will man nun den Bogen von A an, wo $y = 0$ ist: so wird $\frac{8}{27}a.\ 1^{\frac{3}{2}} + C = 0$, folglich $C = -\frac{8a}{27}$. Demnach ist $AM = \frac{8}{27}a\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}a$.

§. 44.

Aufgabe. Die Gleichung für eine Curve aus der Formel für ihren rectificirten Bogen zu finden.

Man differentiire die gegebene Formel, setze solche der allgemeinen Formel für das Differential des Bogens $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ §. 43. gleich, reducire gehörig solche Gleichung, und integrire dieselbe.

Es sey z. E. die Formel $\sqrt{x^3}$ für einen rectificirten Bogen gegeben: so ist das Differential $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, folglich $\frac{9}{4}xdx^2 = dx^2 + dy^2$, und daher $\frac{9}{4}xdx^2 - dx^2 = dy^2$; folglich $dx\sqrt{(\frac{9}{4}x - 1)} = dy$, oder $dx\,(\frac{9}{4}x - 1)^{\frac{1}{2}} = dy$, und integrirt, $\frac{2}{3}(\frac{9}{4}x - 1)^{\frac{3}{2}} = y$, folglich $\frac{4}{9}(\frac{9}{4}x - 1)^3 = y^2$, $-\frac{64}{729}$ oder $(x - \frac{4}{9})^3 = y^2$, das ist, $x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{27}x - \frac{64}{729} = y^2$, die Gleichung für solche Curve.

§. 45.

Aufgabe. Eine körperliche Figur, welche durch das Umdrehen einer ebenen Figur APM um ihre Axe AP entsteht, zu cubiren. Fig. 216.

1. Man ziehe die Ordinaten PM, pm, unendlich nahe an einander: so wird die Fläche PpmM beym Umdrehen um die Axe Pp einen Cylinder beschreiben, welcher das Differential des Körpers ist, der durch das Umdrehen der Fläche APM um die Axe AP entstehet.

2. Man suche die allgemeine Formel für jedes solches körperliche Differential auf folgende Art. Da obgedachter kleiner Cylinder zur Grundfläche einen Cirkel hat, dessen Halbmesser zwischen PM, pm, oder da solche unendlich nahe, dessen Halbmesser selbst PM oder pm ist: so nehme man hiezu PM = y. Daher ist dessen Peripherie $\frac{py}{r}$, wo r : p die Verhältniß des Halbmessers zur Peripherie anzeigt, und dessen Flächeninnhalt $= \frac{py}{r} . \frac{1}{2} y = \frac{py^2}{2r}$; folglich der körperliche Innhalt des obgedachten kleinen Cylinders $= \frac{py^2}{2r} . Pp = \frac{py^2dx}{2r}$, die gesuchte allgemeine Formel.

3. Ist nun eine Gleichung für die sich umdrehende Fläche APM gegeben: so suche man daraus den Werth für y^2, oder dx, bringe solchen in die allgemeine Formel, und integrire.

4. Die Constante bestimme man, wie §. 41.

Es sey z. E. die sich umdrehende Fläche, planum generans, eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$: so ist die allgemeine Formel nunmehr $\frac{paxdx}{2r}$, und integrirt, $\frac{pax^2}{4r}$,

 oder

oder y^2 anstatt ax gesetzt, $\frac{py^2x}{4r} = \frac{px^2}{2r} \cdot \frac{x}{2}$, wo der erste Factor die circularische Grundfläche des Körpers, und der zweyte seine halbe Höhe anzeigt, so daß also der Körper die Hälfte des mit ihm correspondirenden Cylinders ist. Nimmt man nun A zum Anfangspunkte an: so ist $x = 0$, folglich auch die Constante $= 0$. Nimmt man C zum Anfangspunkte an, so daß AC = e: so wird, wenn x = e, das Integral $\frac{ape^2}{4r} + C = 0$, folglich $C = -\frac{ape^2}{4r}$, und daher das vollständige Integral $= \frac{apx^2 - ape^2}{4r}$.

Es sey ferner die sich umdrehende Fläche, planum generans, eine Ellipse, deren Gleichung VI. §. 43. $y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2)$: so ist die allgemeine Formel des körperlichen Differentials nunmehr $\frac{pdx}{2r} \cdot \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2) = \frac{pc^2}{2ra^2}(axdx - x^2dx)$, und integrirt, $\frac{pc^2}{2ra^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ wobey die Constante $= 0$ ist, wenn man A zum Anfangspunkte nimmt. Will man den ganzen Körper: so setze man in dem Integral a anstatt x, und man erhält $\frac{pc^2}{2ra^2}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{pac^2}{12r} = \frac{pc^2}{4r} \cdot \frac{1}{3}a = \frac{pc^2}{8r} \cdot \frac{2}{3}a$, wo der erste Factor die Cirkelfläche des Körpers, welche c zum Halbmesser hat, der andre $\frac{2}{3}$ seiner Höhe anzeigt, so daß also der Körper $\frac{2}{3}$ des mit ihm correspondirenden Cylinders ist. Da nun VI. §. 43. Zus. der Cirkel eine Ellipse, worinn c = a, ist: so gilt ein Gleiches von der Sphäre. Nimmt man C für

für den Anfangspunkt, so daß $AC = e$, so kann man auf eben die Art, wie beym vorhergehenden Beyspiele, die Constante bestimmen, und darnach den Abschnitt einer elliptischen Sphäroide berechnen, welcher zwischen zwey Durchschnitten, die um $x - e$ von einander abstehen, enthalten ist.

Es sey weiter die sich umdrehende Fläche, planum generans, ein rechtwinklichter Triangel, TPM, der also einen geraden Kegel beschreibt. Nun sey $TA = x$, $AE = y$, $TP = a$, $PM = b$: so ist $a : b = x : y$, folglich $y = \frac{bx}{a}$, und daher $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, folglich die allgemeine Formel nunmehr $\frac{pb^2x^2dx}{2a^2r}$, und integrirt, $\frac{pb^2x^3}{6a^2r}$. Setzt man $x = a$, so ist der ganze Kegel $\frac{pb^2a}{6r} = \frac{pb^2}{2r} \cdot \frac{1}{3}a$, wo der erste Factor die Grundfläche, der zweyte $\frac{1}{3}$ der Höhe ist.

Zusatz. Will man Körper berechnen, die nicht durch Umdrehung einer Fläche entstehen, z. E. eine Pyramide ABFEC Fig. 165. so denke man sich parallele Schnitte, wie GLKH, deren Höhe unendlich klein ist. Nun sey $AM = x$, folglich die Höhe des Schnitts $= dx$, $AN = a$, $BFEC = b^2$: so ist $a^2 : x^2 = b^2 : GLKH$, und daher $GLKH = \frac{b^2x^2}{a^2}$, folglich das körperliche Differential $\frac{b^2x^2dx}{a^2}$, und integrirt, $\frac{b^2x^3}{3a^2} = \frac{b^2x^2}{a^2} \cdot \frac{x}{3} = GLKH. \frac{1}{3}AM.$

§. 46.

Aufgabe. Die krumme Oberfläche eines Körpers, der durch Umdrehung einer ebenen Figur APM um ihre Axe AP entstehet, zu quadriren. Fig. 216.

1. Der unendlich kleine Bogen Mm, beschreibt beym Umdrehen eine ringförmige Zone, deren Grundlinie die Peripherie eines Cirkels, dessen Halbmesser $PM = y$, und deren Höhe der unendlich kleine Bogen $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ist. Nun ist, wenn $r : p$ die Verhältniß des Halbmessers zur Peripherie anzeigt, $r : p = y : \frac{py}{r}$. Folglich ist das Differential der krummen Oberfläche $= \frac{py}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

2. Ist nun eine Gleichung für das planum generans gegeben: so bestimme man daraus den Werth für dx, oder für y und dy, setze solchen Werth in die allgemeine Formel, und suche dafür das Integral.

Es sey z. E. das planum generans eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$. Folglich ist $2ydy = adx$, und $\frac{2ydy}{a} = dx$, folglich $\frac{4y^2dy^2}{a^2} = dx^2$. Demnach ist die allgemeine Formel nunmehr $\frac{py}{r} \sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2}{a^2} + dy^2\right)} = \frac{py}{r} \sqrt{dy^2 \left(\frac{4y^2}{a^2} + 1\right)} = \frac{pydy}{r} . \left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Hiervon ist das Integral $\frac{pydy}{r} \left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} . \frac{8ydy}{a^2} =$

$$\frac{a^2pydy . \left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r . 12ydy} = \frac{a^2p \left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{12r} + C.$$

Nimmt man hier den Anfangspunkt A, so wird $y = 0$, folglich $\frac{a^2p}{12r} + C = 0$, folglich $C = \frac{-a^2p}{12r}$. Demnach ist die ganze unbestimmte Oberfläche $= \frac{a^2p}{12r} \left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2p}{12r}$.

§. 47.

§. 47.

Aufgabe. Eine Ebene drehet sich um ihre Axe und erzeugt einen Körper; man soll aus dem Inhalt dieses Körpers die Gleichung für solche Ebene finden.

Man differentiire den gegebenen Inhalt, setze das Resultat der allgemeinen Formel §. 45. gleich, und reducire die Gleichung.

Es sey z. E. $\frac{apx^2}{4r}$ gegeben: so ist das Differential $\frac{apxdx}{2r} = \frac{py^2dx}{2r}$, folglich $ax = y^2$, die Gleichung für die Parabel.

Ende des ersten Theils.

Verbesserungen.

S. 5 Z. 5 nach heißt setze 5, S. 6 §. 10 Z. 7 statt die setze jede, S. 12 §. 28 Z. 4 statt sie in setze sie nach, S. 22 §. 53 Z. 1 statt dividiren setze multipliciren oder dividiren, Z. 3 statt und umgekehrt setze oder dividirt, S. 34 §. 87 Z. 17 statt $\frac{2}{1}{}^{7}$ setze $\frac{2}{1}\frac{7}{7}$, S. 35 §. 91 Z. 6 statt $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}$ setze $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}$, S. 44 §. 4 Z. 5 statt $\overset{ad}{bc}$ setze $\frac{ad}{bc}$, S. 50 §. 16 Z. 7 statt einzeln setze einzelnen, S. 51 §. 20 Z. 2 statt eiander setze einander, S. 71 Z. 4 statt 10, 10, 1000, setze 10, 100, 1000, S. 88 Z. 13 statt 135 setze 35, Z. 14 u. 20 statt Geld setze Gold, S. 93 §. 92 Z. 9 statt $d + 6d$ setze $a + 6d$, S. 94 Z. 1 statt nach allgemeiner setze noch allgemeinere, S. 97 §. 100 Z. 11 statt $a^n . m^{n-1}$ setze $a . m^{n-1}$, S. 115 Z. 1 statt $\sqrt{}$ setze $\sqrt[7]{}$, S. 117 §. 126 Z. 8 statt Waren setze Wären, S. 120 Z. 20. statt Contin setze Conti, S. 131 Z. 5 nach ihre setze den, S. 132 §. 17 Z. 5 nach die setze den, S. 137 Z. 1 statt CB setze AB, §. 31 Z. 7 nach ihre setze den, S. 139 §. 35 Z. 7 statt FE setze FA, S. 141 §. 38 Z. 8 nach ihre setze den, S. 145 §. 46 Z. 3 statt CBA setze BAC, S. 155 §. 69. Z. 4 statt 24. setze 42. S. 157 §. 73 Z. 18 statt AH + KC setze AK + KC, S. 160 §. 79 Z. 12 statt $<$ setze $>$, S. 162 §. 84 Z. 13 statt halb setze durch, S. 179 Z. 18 statt AD setze AB, S. 186 §. 134 Z. 3 nach theilen setze Fig. 113. S. 200 Z. 2 statt KL setze KC, S. 218 Z. 8 nach AB : OT setze $=$, S. 231 Z. 20 statt Nunney setze Nunnez, S. 232. §. 7 Z. 1 statt in setze ist. S. 238 §. 18 Z. 15 statt zwölseitigen setze zwölfseitigen, S. 240 Z 16 statt $\frac{1}{2p}$ setze $\frac{1}{2}. p$, S. 251 §. 38 Z. 16 statt $\varrho = ra$ setze $\varrho^2 = ra$, S. 255 Z. 14 statt CEF setze CEP, S. 268 §. 61 Z. 7 statt ADLF setze BDLF, S. 272 §. 63 Z. 6 statt Kf setze KL, §. 64 Z. 1 vor Triangel setze sphärischen, S. 275 §. 66 Z. 1 statt Lehrsatz setze Lehnsatz, S. 293 §. 6 Z. 12 statt Zahl setze Größe S. 310 §. 26 Z. 4 statt 5 setze s S. 313 §. 28 Z. 19 statt oder setze aber, S. 332 Z. 2 statt $\frac{-a \mp \sqrt{5}}{2}$ setze $\frac{-a \mp a\sqrt{5}}{2}$, S. 339 §. 21 Z. 3 statt Diameter setze oder der Diameter, S. 341 §. 23 Z. 8 statt AP setze AB, S. 342 Z. 3 statt AB setze AP, Z. 21 statt GM setze Gm, S. 343 §. 25 Z. 19 statt Schritte setze Schnitte, S. 349 Z. 27 statt CB setze CP, S. 361 §. 58 Z. 3 statt einen Triangel setze Triangel, S. 365 Z. 14 statt veränderliche setze veränderlichen, S. 380 Z. 4 statt $-\, max^{m-1} dx$ setze $-\, max^{-m-1} dx$,

S. 380 Z. 5 statt $-\frac{m}{n} x^{\frac{-m-n}{n}} dx = \frac{-\frac{madx}{n}}{\sqrt[n]{x^{m+n}}}$ setze

$$-\frac{m}{n} a x^{\frac{-m-n}{n}} dx = \frac{-\frac{madx}{n}}{n\sqrt[n]{x^{m+n}}}.$$

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lorenz, Johann Friedrich, 1738-1807

Die Elemente der Mathematik in sechs Büchern in 6 Büchern mit 1 Anhange

Bd.: Erster Theil

Leipzig 1785

Math.u. 110-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594094-0
VD18 14496208-001